Université BORDEAUX I | ENSERB
Juin 1996 | J.Bétréma

DEA, Algorithmique et combinatoire : corrigé

1 Arbres

1. La série L débute par :

$$L = \mathbf{0} + \mathbf{10} + \mathbf{200} + \mathbf{110} + \mathbf{3000} + \mathbf{2100} + \mathbf{2010} + \mathbf{1200} + \mathbf{1110} + \ldots$$

   Soit n le nombre d'arêtes de l'arbre codé par un mot u. Chaque entier u_i dans u représente une arité, c'est à dire le nombre d'arêtes issues d'un sommet; donc $n = \sum u_i$. D'autre part la longueur du mot u est égale au nombre de sommets de l'arbre, donc $n = |u| - 1$.

2. L'algorithme demandé, qui prouve l'unicité de la décomposition $u = \mathbf{k}v_1v_2\ldots v_k$, consiste à compter le nombre d'arêtes "ouvertes" ; par exemple pour l'arbre codé par **3200010** :

   - le premier entier, **3** "ouvre" trois arêtes, disons 1, 2, 3;
   - le second entier, **2**, "ferme" l'arête 1, et en ouvre deux nouvelles, 4 et 5;
   - les deux zéros suivants ferment les arêtes 4 et 5;
   - le troisième zéro ferme l'arête 2;
   - enfin, l'entier **1** ferme l'arête 3, et ouvre l'arête 6, fermée par le dernier **0**.

   On aboutit ainsi à la fonction suivante, qui parcourt un mot u de longueur n (le résultat vaut 1 si u code un arbre, 0 sinon).

```
int decompose (int *u, int n) {
  int i,
    k = u[0],   /* arite de la racine */
    h = k;      /* hauteur; voir ci-dessous */

  for (i = 1; i < n && k > 0; i++) {
    h = h + u[i] - 1;
    if (h < k) {      /* fin du parcours d'un arbre sous la racine */
      afficher (i);   /* details sans importance */
      k--;
    }
  }
  return (i == n && k == 0);
}
```

Un peu de réflexion montre que le nombre d'arêtes "ouvertes" n'est pas autre chose que la hauteur du point courant dans un chemin analogue aux chemins de Dyck : **0** correspond à un pas descendant (feuille), **1** à un pas horizontal, **2** à un pas ascendant ordinaire, et $\mathbf{k} > 2$ à un pas ascendant qui franchit $k-1$ niveaux.

L'équation (1) vérifiée par L : $L = \sum \mathbf{k} L^k$ est une conséquence immédiate de l'unicité de la décomposition d'un mot de L.

3. Soit d_n le nombre d'arbres plans avec n arêtes. Pour retrouver la série énumératrice des arbres plans $d(t) = \sum d_n t^n$, on a deux possibilités;

   - remplacer chaque "lettre" d'un mot de L par la variable t; chaque mot u est donc remplacé par $t^{|u|}$, soit t^{n+1}, où n est le nombre d'arêtes de l'arbre associé. La série qui résulte de cette substitution est donc;

     $$e(t) = \sum d_n t^{n+1} = td(t)$$

     et l'équation (1) devient;

     $$e(t) = t \sum e^k(t) = t/(1-e(t))$$

   - remplacer chaque "lettre" $\mathbf{k}$ d'un mot de L par t^k; chaque mot u est donc remplacé par t^n, où n est le nombre d'arêtes de l'arbre associé. La série qui résulte de cette substitution est donc $d(t)$, et l'équation (1) devient;

     $$d(t) = \sum t^k d^k(t) = 1/(1-td(t))$$

   Il est clair que les deux équations obtenues sont équivalentes (heureusement), et qu'on retrouve l'équation du second degré classique pour la série de Catalan.

   4) $L = \mathbf{0} + \mathbf{10} + \mathbf{200} + \mathbf{110} + \mathbf{3000} + \mathbf{2100} + \mathbf{2010} + \mathbf{1200} + \mathbf{1110} + \ldots$

   On obtient $g(t)$ en remplaçant $\mathbf{k}$ par $a_k t$, soit :

   $$g(t) = a_0 t + a_0 a_1 t^2 + (a_0^2 a_2 + a_0 a_1^2) t^3 + (a_0^3 a_3 + 3a_0^2 a_1 a_2 + a_0 a_1^3) t^4 + \ldots$$

   L'équation (1) devient, après substitution;

   $$g(t) = \sum a_k t g^k(t) = t f(g(t))$$

   Cette équation équivaut à la récurrence suivante sur les coefficients b_i de la série $g(t)$:

   $$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= a_0 \\ b_2 &= a_1 b_1 \\ b_3 &= a_1 b_2 + a_2 b_1^2 \\ \ldots \end{aligned}$$

Cette récurrence détermine les b_i, ce qui prouve l'unicité (et l'existence) de la solution.

5) Terme de degré 0 dans $f(t)$: $c_1 = a_0$.

Terme de degré 1 dans $f^2(t)$: $c_2 = 2a_0a_1$.

Terme de degré 2 dans $f^3(t)$: $c_3 = 3(a_0^2a_2 + a_0a_1^2)$.

Etc..., donc b_n semble égal à c_n/n.

Par exemple, on calcule c_3 en choisissant, dans $f^3(t)$, trois termes dont la somme des ordres soit égale à 2 ; les choix possibles sont:

0 0 2, 0 1 1, 0 2 0, 1 0 1, 1 1 0, 2 0 0

et pour chacun de ces mots, il existe un conjugué et un seul qui soit un mot de L. Cet argument est général; c'est le principe de Raney, qui se démontre en examinant le chemin associé au mot (voir question 2).

2 Nombres de Stirling

Pour fabriquer une permutation sur n éléments, avec par exemple trois cycles, de longueur respective a, b, c :

- on choisit trois ensembles de nombres, de cardinaux a, b, c; le nombre de choix vaut :
$$\frac{n!}{a!b!c!}$$
- on choisit les permutations circulaires de ces trois ensembles; le nombre de choix vaut $(a-1)!(b-1)!(c-1)!$

La série $f(z) = ln 1/(1-z)$ est la série génératrice exponentielle des cycles; lorsqu'on choisit, dans le produit $f^3(z)$, le terme de degré a dans l'un des facteurs, celui de degré b dans un autre, et celui de degré c dans le dernier, le terme obtenu vaut :

$$3!\frac{(a-1)!}{a!}\frac{(b-1)!}{b!}\frac{(c-1)!}{c!}z^n$$

(le coefficient 3! correspond aux choix possibles des facteurs).

Donc $\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$ est égal au coefficient de z^n dans la série :

$$\frac{1}{3!}\left(ln\frac{1}{1-z}\right)^3$$

et ce raisonnement, présenté pour $k = 3$, est général.

Pour les nombres de Stirling de seconde espèce, la situation est la même, sauf qu'il ne faut pas choisir de permutations circulaires sur les blocs, et donc remplacer la série exponentielle des cycles par :

$$z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \ldots = e^z - 1$$

3 Cartes planaires

Pour faire la liste des cartes planaires avec 3 arêtes (et donc 6 brins), il faut commencer par écrire les 11 partitions de 6, qui donnent les structures cycliques possibles pour σ ; les partitions $2\ 1^4$ et 1^6 ne peuvent fournir de carte connexe.

La liste complète est la suivante (la permutation σ donnée est l'une de celles possibles, avec $\alpha = (12)(34)(56)$; les automorphismes sont donnés par les images du brin 1 ; le nombre de cartes pointées est égal au nombre de brins, divisé par le nombre d'automorphismes) :

Numéro	Partition	σ	Automor- -phismes	Nb. cartes pointées	Carte duale
1	6	(123456)	1, 3, 5	2	12
2	6	(123564)	1, 5	3	14
3	5 1	(13456)(2)	1	6	6
4	5 1	(13564)(2)	1	6	10
5	4 2	(1235)(4 6)	1	6	11
6	4 1 1	(1235)(4)(6)	1	6	3
7	4 1 1	(1325)(4)(6)	1, 2	3	9
8	3 3	(135)(264)	1, 2, 3, 4, 5, 6	1	13
9	3 3	(134)(256)	1, 2	3	7
10	3 2 1	(123)(45)(6)	1	6	4
11	3 2 1	(135)(46)(2)	1	6	5
12	3 1 1 1	(135)(2)(4)(6)	1, 3, 5	2	1
13	2 2 2	(16)(23)(45)	1, 2, 3, 4, 5, 6	1	8
14	2 2 1 1	(13)(25)(4)(6)	1, 2	3	2

On vérifie que le nombre total de cartes planaires pointées est conforme à celui donné par la formule de Tutte :

$$54 = 2 \times 3^3 \frac{6!}{3!5!}$$