Université BORDEAUX I — ENSERB
Juin 1996 — J.Bétréma

DEA, Algorithmique et combinatoire
(Durée: 3h)

1 Arbres

On considère les *arbres plans*, ie. les arbres dont chaque sommet possède un nombre variable k de fils, avec un ordre sur les fils ; si $k = 0$, le sommet est une feuille. Le nombre de tels arbres, avec n arêtes, est le nombre de Catalan C_n.

Dans cette partie, on code un arbre par un parcours *préfixe* : le mot associé commence par l'arité $\mathbf{k}$ de la racine, suivie du code du premier fils, puis du code du second fils, etc... Voir exemple. L'alphabet A utilisé pour ce codage est donc l'ensemble des entiers naturels, que dans la suite on écrira en gras, pour ne pas les confondre avec d'autres usages de ces mêmes entiers :

$$A = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{k}, \ldots\}$$

La série formelle L (en variables non commutatives) associée à ce codage commence donc par :

$$L = \mathbf{0} + \mathbf{10} + \mathbf{200} + \mathbf{110} + \ldots$$

Par abus de langage, on dira par la suite que tout mot sur A^* qui code un arbre, "appartient" à L.

1. Ecrire les cinq termes suivants de la série L. Donner deux façons distinctes de lire le nombre d'arêtes (de l'arbre associé) sur un mot de L.

2. Tout mot $u \in L$ s'écrit par définition :

$$u = \mathbf{k} v_1 v_2 \ldots v_k$$

   où chaque v_i est un mot de L. Montrer que cette écriture est unique en donnant (en langage C) un algorithme (linéaire, en une seule passe) qui calcule la décomposition ci-dessus (et, en prime, décide si $u \in L$).

   En déduire que la série L vérifie l'équation :

$$L = \sum_{k \geq 0} \mathbf{k} L^k \tag{1}$$

3. Comment retrouver la série énumérative des arbres plans à partir de l'équation (1) ?

4. On considère la série formelle $f(t) = \sum a_k t^k$, on remplace dans L chaque lettre $\mathbf{k} \in A$ par $a_k t$, ce qui transforme la série L en une série $g(t) = \sum b_k t^k$. Ecrire les premiers termes de la série $g(t)$; montrer qu'on a :
$$g(t) = tf(g(t)) \tag{2}$$
Montrer que la solution ainsi obtenue de l'équation (2) (où l'inconnue est la série g), est unique.

5. Comparer b_n et le terme de degré $n-1$ dans $f^n(t)$, pour $n = 1, 2, 3$; en déduire une conjecture pour la valeur de b_n ; prouver cette conjecture, en utilisant le principe de Raney.

   Note : cette preuve n'est pas très difficile, mais est très vraisemblablement impossible à obtenir dans le cadre de l'examen.

2 Nombres de Stirling

On a les formules suivantes (bien noter que k est fixé, et n variable) :
$$\sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(ln \frac{1}{1-z} \right)^k$$
$$\sum_{n \geq k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^z - 1)^k$$

Donner une interprétation combinatoire de ces formules, en commençant par $k = 3$; ie. expliquer par la combinatoire pourquoi le coefficient de z^n est le même dans le terme gauche et dans le terme droit.

3 Cartes planaires

> **Attention :** ne pas passer plus d'une heure sur cette partie; une réponse partielle sera parfaitement acceptée.

Faire la liste des cartes planaires avec 3 arêtes; on numérotera les brins de telle sorte que l'involution α (qui définit les arêtes) soit égale à :
$$\alpha = (12)(34)(56)$$
et pour chaque carte C on donnera :

- une permutation σ qui définisse les sommets de C ;
- le groupe d'automorphismes de C ;
- le nombre de cartes pointées associées à C ;
- la carte duale de C.

On pourra *vérifier* que la liste est complète grâce à la formule d'énumération de Tutte, qui indique qu'il existe 54 cartes planaires pointées avec 3 arêtes.

Corrigé

4 Arbres

1. La série L débute par :

$$L = \mathbf{0} + \mathbf{10} + \mathbf{200} + \mathbf{110} + \mathbf{3000} + \mathbf{2100} + \mathbf{2010} + \mathbf{1200} + \mathbf{1110} + \ldots$$

   Soit n le nombre d'arêtes de l'arbre codé par un mot u. Chaque entier u_i dans u représente une arité, c'est à dire le nombre d'arêtes issues d'un sommet; donc $n = \sum u_i$. D'autre part la longueur du mot u est égale au nombre de sommets de l'arbre, donc $n = |u| - 1$.

2. L'algorithme demandé, qui prouve l'unicité de la décomposition $u = \mathbf{k}v_1v_2 \ldots v_k$, consiste à compter le nombre d'arêtes "ouvertes" ; par exemple pour l'arbre codé par **3200010** :

   - le premier entier, **3** "ouvre" trois arêtes, disons 1, 2, 3;
   - le second entier, **2**, "ferme" l'arête 1, et en ouvre deux nouvelles, 4 et 5;
   - les deux zéros suivants ferment les arêtes 4 et 5;
   - le troisième zéro ferme l'arête 2;
   - enfin, l'entier **1** ferme l'arête 3, et ouvre l'arête 6, fermée par le dernier **0**.

   On aboutit ainsi à la fonction suivante, qui parcourt un mot u de longueur n (le résultat vaut 1 si u code un arbre, 0 sinon).

```
int decompose (int *u, int n) {
  int i,
    k = u[0],   /* arite de la racine */
    h = k;      /* hauteur; voir ci-dessous */

  for (i = 1; i < n && k > 0; i++) {
    h = h + u[i] - 1;
    if (h < k) {      /* fin du parcours d'un arbre sous la racine */
      afficher (i);   /* details sans importance */
      k--;
    }
  }
  return (i == n && k == 0);
}
```

   Un peu de réflexion montre que le nombre d'arêtes "ouvertes" n'est pas autre chose que la hauteur du point courant dans un chemin analogue aux chemins de Dyck : **0** correspond à un pas descendant (feuille), **1** à un pas horizontal, **2** à un pas ascendant ordinaire, et $\mathbf{k} > 2$ à un pas ascendant qui franchit $k - 1$ niveaux.

   L'équation (1) vérifiée par L : $L = \sum \mathbf{k}L^k$ est une conséquence immédiate de l'unicité de la décomposition d'un mot de L.

3. Soit d_n le nombre d'arbres plans avec n arêtes. Pour retrouver la série énumératrice des arbres plans $d(t) = \sum d_n t^n$, on a deux possibilités;

   - remplacer chaque "lettre" d'un mot de L par la variable t; chaque mot u est donc remplacé par $t^{|u|}$, soit t^{n+1}, où n est le nombre d'arêtes de l'arbre associé. La série qui résulte de cette substitution est donc;

   $$e(t) = \sum d_n t^{n+1} = td(t)$$

   et l'équation (1) devient;

   $$e(t) = t \sum e^k(t) = t/(1 - e(t))$$

   - remplacer chaque "lettre" **k** d'un mot de L par t^k; chaque mot u est donc remplacé par t^n, où n est le nombre d'arêtes de l'arbre associé. La série qui résulte de cette substitution est donc $d(t)$, et l'équation (1) devient;

   $$d(t) = \sum t^k d^k(t) = 1/(1 - td(t))$$

   Il est clair que les deux équations obtenues sont équivalentes (heureusement), et qu'on retrouve l'équation du second degré classique pour la série de Catalan.

4) $L = \mathbf{0} + \mathbf{10} + \mathbf{200} + \mathbf{110} + \mathbf{3000} + \mathbf{2100} + \mathbf{2010} + \mathbf{1200} + \mathbf{1110} + \dots$

On obtient $g(t)$ en remplaçant **k** par $a_k t$, soit :

$$g(t) = a_0 t + a_0 a_1 t^2 + (a_0^2 a_2 + a_0 a_1^2)t^3 + (a_0^3 a_3 + 3a_0^2 a_1 a_2 + a_0 a_1^3)t^4 + \dots$$

L'équation (1) devient, après substitution;

$$g(t) = \sum a_k t g^k(t) = tf(g(t))$$

Cette équation équivaut à la récurrence suivante sur les coefficients b_i de la série $g(t)$:

$$\begin{array}{lcl} b_0 & = & 0 \\ b_1 & = & a_0 \\ b_2 & = & a_1 b_1 \\ b_3 & = & a_1 b_2 + a_2 b_1^2 \\ \dots & & \end{array}$$

Cette récurrence détermine les b_i, ce qui prouve l'unicité (et l'existence) de la solution.

5) Terme de degré 0 dans $f(t)$: $c_1 = a_0$.

Terme de degré 1 dans $f^2(t)$: $c_2 = 2a_0 a_1$.

Terme de degré 2 dans $f^3(t)$: $c_3 = 3(a_0^2 a_2 + a_0 a_1^2)$.

Etc..., donc b_n semble égal à c_n/n.

Par exemple, on calcule c_3 en choisissant, dans $f^3(t)$, trois termes dont la somme des ordres soit égale à 2 ; les choix possibles sont:

0 0 2, 0 1 1, 0 2 0, 1 0 1, 1 1 0, 2 0 0

et pour chacun de ces mots, il existe un conjugué et un seul qui soit un mot de L. Cet argument est général; c'est le principe de Raney, qui se démontre en examinant le chemin associé au mot (voir question 2).

5 Nombres de Stirling

Pour fabriquer une permutation sur n éléments, avec par exemple trois cycles, de longueur respective a, b, c :

- on choisit trois ensembles de nombres, de cardinaux a, b, c; le nombre de choix vaut :
$$\frac{n!}{a!b!c!}$$
- on choisit les permutations circulaires de ces trois ensembles; le nombre de choix vaut $(a-1)!(b-1)!(c-1)!$

La série $f(z) = ln 1/(1-z)$ est la série génératrice exponentielle des cycles; lorsqu'on choisit, dans le produit $f^3(z)$, le terme de degré a dans l'un des facteurs, celui de degré b dans un autre, et celui de degré c dans le dernier, le terme obtenu vaut :

$$3!\frac{(a-1)!}{a!}\frac{(b-1)!}{b!}\frac{(c-1)!}{c!}z^n$$

(le coefficient 3! correspond aux choix possibles des facteurs).

Donc $\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$ est égal au coefficient de z^n dans la série :

$$\frac{1}{3!}\left(ln\frac{1}{1-z}\right)^3$$

et ce raisonnement, présenté pour $k = 3$, est général.

Pour les nombres de Stirling de seconde espèce, la situation est la même, sauf qu'il ne faut pas choisir de permutations circulaires sur les blocs, et donc remplacer la série exponentielle des cycles par :

$$z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \ldots = e^z - 1$$

6 Cartes planaires

Pour faire la liste des cartes planaires avec 3 arêtes (et donc 6 brins), il faut commencer par écrire les 11 partitions de 6, qui donnent les structures cycliques possibles pour σ; les partitions $2\ 1^4$ et 1^6 ne peuvent fournir de carte connexe.

La liste complète est la suivante (la permutation σ donnée est l'une de celles possibles, avec $\alpha = (12)(34)(56)$; les automorphismes sont donnés par les images du brin 1;

le nombre de cartes pointées est égal au nombre de brins, divisé par le nombre d'automorphismes) :

Numéro	Partition	σ	Automor- -phismes	Nb. cartes pointées	Carte duale
1	6	(123456)	1, 3, 5	2	12
2	6	(123564)	1, 5	3	14
3	5 1	(13456)(2)	1	6	6
4	5 1	(13564)(2)	1	6	10
5	4 2	(1235)(4 6)	1	6	11
6	4 1 1	(1235)(4)(6)	1	6	3
7	4 1 1	(1325)(4)(6)	1, 2	3	9
8	3 3	(135)(264)	1, 2, 3, 4, 5, 6	1	13
9	3 3	(134)(256)	1, 2	3	7
10	3 2 1	(123)(45)(6)	1	6	4
11	3 2 1	(135)(46)(2)	1	6	5
12	3 1 1 1	(135)(2)(4)(6)	1, 3, 5	2	1
13	2 2 2	(16)(23)(45)	1, 2, 3, 4, 5, 6	1	8
14	2 2 1 1	(13)(25)(4)(6)	1, 2	3	2

On vérifie que le nombre total de cartes planaires pointées est conforme à celui donné par la formule de Tutte :

$$54 = 2 \times 3^3 \frac{6!}{3!5!}$$