UNIVERSITÉ BORDEAUX I ENSERB
Mai 1995

DEA, Algorithmique et combinatoire

(Durée: 2h)

1. Montrer que la série :

$$1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \ldots + \frac{q^{k(k+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)} + \ldots$$

   énumère des partitions d'un type simple. En déduire une factorisation de cette expression.

2. On note $(x)_n$ la factorielle décalée descendante :

$$(x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1)$$

   Vérifier qu'on a :

$$(x+1)_n - (x)_n = n(x)_{n-1}$$

   On peut donc calculer facilement : $\sum_{k=1}^{x}(k)_n$ Donner la formule, et indiquer comment on peut en déduire le calcul de : $\sum_{k=1}^{x} k^n$.

   Indiquer le principe général, et traiter les cas particuliers $n = 1, 2$.

3. Un automorphisme d'une carte est une bijection Φ sur les brins, qui envoie les sommets sur les sommets – en respectant, pour chaque sommet, l'ordre cyclique des brins issus de ce sommet –, et les arêtes sur les arêtes,

   Montrer que cela revient à dire que Φ commute avec σ et α (avec les notations habituelles), et que si les sommets x et y sont reliés par l'arête a, $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$ sont reliés par $\Phi(a)$.

   Montrer que Φ est déterminée par son action sur un seul brin. En déduire la liste explicite des automorphismes de la carte obtenue par projection d'un tétraèdre.