Université BORDEAUX I le 18 septembre 1996

Maîtrise d'Informatique
Calculabilité et Complexité - Session de septembre

Durée 2 heures
Tous documents autorisés
Barème : 3+4+3+3+3+4
(La clarté de la présentation sera prise en compte dans la notation.)

Exercice 1 Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. Les explications ne sont pas exigées.

(a) Le problème 3-SAT est décidable.
(b) Le problème CLIQUE est NP-complet.
(c) Tout ensemble récursivement énumérable est décidable.
(d) La fonction universelle $U(m;x)$ est totale.
(e) L'ensemble des nombres premiers est décidable.
(f) Tout problème polynomial est NP-complet.

Exercice 2 (a) Montrer que toute fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ totale et décroissante (en sens large) est calculable.

(b) Donner un exemple d'une fonction totale et strictement croissante qui ne soit pas calculable.

Exercice 3 Construire une machine de Turing à deux bandes qui lit un mot binaire d'entrée sur la première bande, calcule le nombre des zéros dans ce mot, et écrit la réponse sur la deuxième bande.

Exercice 4 Ecrire un schéma de récursion pour la fonction suivante:

$$n \mapsto n\text{-ème chiffre après la virgule de } \sqrt{7}$$

(le "0-ème chiffre après la virgule" est le chiffre juste avant la virgule). L'utilisation des fonctions déjà définies comme récursives en TD est autorisée.

Exercice 5 Soit A un ensemble décidable. Pour tout $x \in A$ on met dans B tous les nombres $2^x, 3^x, \ldots, n^x, \ldots$. Montrer que l'ensemble B est décidable. (Une description informelle d'un algorithme est suffisante.)

Tourner la page S.V.P.

Exercice 6 Le problème de MARIAGE PARFAIT se décrit comme suit:

> Instance: Un tableau carré de taille $n \times n$, dans certaines cases duquel se trouvent des symboles $*$ ("étoiles").
>
> Question: Est-il possible de supprimer un certain nombre d'étoiles, de telle manière qu'il reste une et une seule étoile dans chaque ligne et dans chaque colonne du tableau?

Montrer *directement* (c'est-à-dire, sans s'appuyer sur le théorème de Cook), que le problème de MARIAGE PARFAIT est polynomialement réductible au SAT. (On *ne demande pas* de prouver que le problème SAT est polynomialement réductible au MARIAGE PARFAIT.)