Université BORDEAUX I Le 27 novembre 1995

Maîtrise d'Informatique
Calculabilité et Complexité – Devoir à la maison

Vous pouvez travailler par équipes, mais chacun(e) doit rédiger sa copie personnellement. Les copies doivent être rendues à l'enseignant de votre groupe de TD avant le 15 décembre 1995. La clarté de la présentation sera prise en compte dans la notation.

Barème : 3+3+3+4+2+5

Exercice 1. Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. Expliquer vos réponses.

a) La fonction $f(x)$ égale à $\frac{x}{2}$ pour tout x pair et non définie pour tout x impair est primitive récursive.

b) Pour deux ensembles récursivement énumérables A et B, la différence $A - B$ est toujours décidable.

c) La fonction $x \mapsto x \bmod 17$ est récursive totale.

d) L'union d'une famille dénombrable d'ensembles décidables est un ensemble récursivement énumérable.

e) Toute fonction dont le domaine de définition est fini, est récursive partielle.

f) Toute fonction dont le domaine des valeurs est fini, est récursive partielle.

Exercice 2. Donner une méthode de numérotage des expressions rationnelles

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_q x^q}, \quad p, q, a_i, b_j \in \mathbf{N}$$

(sans simplification : $\frac{1+2x+x^2}{2+2x}$ et $\frac{1+x}{2}$ sont des expressions différentes).

Exercice 3. Ecrire un schéma de récursion pour la fonction suivante:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{x}{y} > \log_3 7, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'utilisation des fonctions déjà définies comme récursives en TD est autorisée.

Exercice 4. Soit $A \subseteq \mathbf{N}$ un ensemble décidable. Pour tout $x \in A$, $x \geq 1$, on met dans B le nombre $x - 2^t$ où t est le plus grand entier tel que $2^t \leq x$. L'ensemble B peut-il ne pas être décidable? Justifier votre réponse.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 5. Soit A un ensemble d'entiers, $A \subseteq \mathsf{N}$. On suppose qu'il existe un algorithme qui pour tout $n \in \mathsf{N}$ nous dit si le nombre

$$\#(A \cap \{0, 1, \ldots, n\})$$

est pair ou impair (le symbole $\#(X)$ signifie le nombre d'éléments dans l'ensemble X.) Montrer que l'ensemble A est décidable. Une description informelle d'un algorithme est suffisante.

Exercice 6 (a) Soit $\mathcal{M}_n$ la classe des machines de Turing (déterministes) avec une bande, avec l'alphabet $\{0, 1, \b\}$, et avec exactement n états. Calculer le nombre d'éléments de la classe $\mathcal{M}_n$.

(b) Soit $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{M}_n$ le sous-ensemble des machines qui s'arrêtent sur la bande vide. Soit $T(n)$ le nombre maximal d'opérations que fait une machine de la classe $\mathcal{A}_n$ sur la bande vide. Expliquer pourquoi la fonction $T(n)$ est bien définie.

(c) La fonction $T(n)$ n'est pas calculable. Même plus que cela : il ne peut pas exister de fonction récursive partielle $f(n)$ telle que $T(n) \leq f(n)$ pour tout n. Démontrer cette propriété.