Université Bordeaux I
Maîtrise d'Informatique 1997/1998

Calculabilité et complexité : feuille 3

Transformations de programmes. On note $\mathcal{P}^{(n)}$ l'ensemble des programmes pour la machine à registres qui n'utilisent pas les registres de données X_k, pour $k > n$ (on dit qu'un programme de ce type calcule une fonction de n variables).

Exercice 3.1

Montrer que le prédicat term défini sur la classe $\mathcal{P}^{(0)}$ des programmes sans entrée par

$$term(Q) = \begin{cases} 1 \text{ si } Q \text{ termine} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

n'est pas décidable.

Exercice 3.2

Montrer que le prédicat zero défini sur $\mathcal{P}^{(0)}$ par

$$zero(Q) = \begin{cases} 1 \text{ si } Q \text{ termine en retournant} 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

n'est pas décidable.

Exercice 3.3

Montrer que le prédicat double défini sur $\mathcal{P}^{(1)}$ par

$$double(P) = \begin{cases} 1 \text{ si } P \text{ calcule la fonction } x \to 2x \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

n'est pas décidable.

Exercice 3.4

On note $C_{17}(Q)$ (pour $Q \in \mathcal{P}^{(0)}$) la propriété "au cours de l'exécution de Q, la $17^{\text{ème}}$ instruction de Q est exécutée au moins une fois". Montrer que le prédicat C_{17} n'est pas décidable. Est-ce la même chose pour la première commande ? pour la seconde ?

Exercice 3.5

Étant donnés un entier n, et un programme P fixé prenant en entrée un nombre n, existe-t-il un algorithme permettant de répondre à la question "le programme P s'arrête-t-il avec la donnée n" ?

Exercice 3.6

La fonction f définie par

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathcal{U}(n, 12) \text{ termine} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est-elle calculable ?

La fonction g définie par

$$g(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathcal{U}(12, n) \text{ termine} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est-elle calculable ?