Université Bordeaux I
Maîtrise d'Informatique 1997/1998

Calculabilité et complexité : feuille 4

Exercice 4.1

Prouver que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

1. $x \rightarrow x$
2. $x \rightarrow 1$
3. $x \rightarrow 2$
4. $(x, y) \rightarrow x + y$
5. $(x, y) \rightarrow x \times y$
6. $x \rightarrow x!$ *(factorielle)*
7. $x \rightarrow x \dot{-} 1$
8. $(x, y) \rightarrow x \dot{-} y$
9. $(x, y) \rightarrow \max(x, y)$
10. $x \rightarrow zero(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x = 0 \\ 0 \ sinon \end{cases}$
11. $(x, y) \rightarrow x > y$
12. $(x, y) \rightarrow x \geq y$

Exercice 4.2

Prouver que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

1. $(x, y) \rightarrow x == y$
2. $(x, y) \rightarrow x\%y$ *(ou 0 si* $y = 0$*)*
3. $(x, y) \rightarrow x/y$ *(ou 0 si* $y = 0$*)*

Exercice 4.3
Montrer que, si f, g et h sont primitives récursives, la fonction

$$x \to \textit{ if } f(x) \textit{ then } g(x) \textit{ else } h(x)$$

l'est aussi.

Exercice 4.4
Montrer que la fonction $x \to \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{x}{17}} \right\rfloor$ est récursive. Est-elle primitive récursive ?

Exercice 4.5
Soit f une fonction primitive récursive strictement croissante. Pour tout entier y, on définit $g(y)$ comme le plus grand des x tels que $f(x) \leq y$ (0 s'il n' existe aucun tel x).

1. *Expliciter la fonction g dans les cas $f(x) = x + 3$; $f(x) = x^2$.*
2. *Montrer que, pour tout y, $g(y) \leq y$.*
3. *Montrer que la fonction g est primitive récursive.*

Exercice 4.6
Prouver que, si $(\overline{x}, n) \to f(\overline{x}, n)$ est une fonction primitive récursive, la fonction F définie par

$$F(\overline{x}, n) = \sum_{k=0}^{n} f(\overline{x}, k)$$

est primitive récursive.

Montrer que les fonctions à quantification bornée

$$(\overline{x}, n) \to \forall k \leq n \;\; f(\overline{x}, k) = 0$$
$$(\overline{x}, n) \to \exists k \leq n \;\; f(\overline{x}, k) = 0$$

sont primitives récursives.

En déduire que la fonction à minimisation bornée

$$(\overline{x}, n) \to \begin{cases} 0 \textit{ si } \forall k \leq n \; f(\overline{x}, k) \neq 0 \\ \min\{k \leq n \mid f(\overline{x}, k) = 0\} \textit{ sinon} \end{cases}$$

est primitive récursive.

Exercice 4.7
Montrer que, si les fonctions g et h sont primitives récursives, la fonction f définie par

$$f(0, y) = g(y)$$
$$f(x + 1, y) = f(x, h(x, y))$$

est aussi primitive récursive. (Indication : écrire $f(x + 1, y)$ sous la forme $g(u(x, y, x + 1))$ où u est une fonction primitive récursive de 3 variables.)