Université Bordeaux I
Maîtrise d'Informatique 1997/1998

Calculabilité et complexité : feuille 7

Exercice 7.1

Soit f une fonction récursive totale telle que, pour tout entier x, on ait $f(x) \geq x$. Montrer que l'ensemble $f(\mathbb{N})$ est décidable.

Exercice 7.2

Montrer que l'ensemble des multiples des éléments d'un ensemble décidable est décidable (une description informelle d'algorithme est suffisante).

L'ensemble des diviseurs d'un ensemble décidable est-il décidable ?

Exercice 7.3

Soit E un ensemble récursivement énumérable non vide. Montrer que E est décidable si et seulement s'il est l'ensemble des valeurs d'une fonction récursive totale croissante.

Exercice 7.4

$\mathcal{U}$ désignant la fonction universelle, pour tout entier n, on note W_n l'ensemble des entiers x pour lesquels $\mathcal{U}(n;x)$ est définie. Montrer qu'un ensemble E est récursivement énumérable si et seulement s'il existe n tel que $E = W_n$.

Exercice 7.5

Pour chacun des ensembles suivants, dire (et justifier) s'il est récursivement énumérable, de complémentaire récursivement énumérable, ou décidable :

1. *l'ensemble des nombres premiers;*
2. *l'ensemble des nombres n tels que le développement décimal de π contienne une suite d'au moins n chiffres 7;*
3. *l'ensemble des nombres n tels que le développement décimal de π contienne une suite d'exactement n chiffres 7;*
4. *$\{n \in \mathbb{N} \ / \ W_n = \emptyset\}$ (W_n désignant l'ensemble des entiers x pour lesquels $\mathcal{U}(n;x)$ est définie);*
5. *$\{n \in \mathbb{N} \ / \ W_n = \mathbb{N}\}$;*
6. *$\{n \in \mathbb{N} \ / \ W_n = W_p\}$ pour p fixé;*
7. *$\{n \in \mathbb{N} \ / \ W_n$ est fini $\}$;*
8. *$\{n \in \mathbb{N} \ / \ W_n$ est récursif $\}$.*