UNIVERSITÉ BORDEAUX I — ANNÉE 1995-1996

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES ET ET D'INFORMATIQUE — NOVEMBRE 1995

MAITRISE INFORMATIQUE — THÉORIE DES LANGAGES

AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ

N.B. Lors de la rédaction de la solution d'une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes.

– I –

On considère le langage $L = a^*ba^*$ (sur $X = \{a, b\}$).

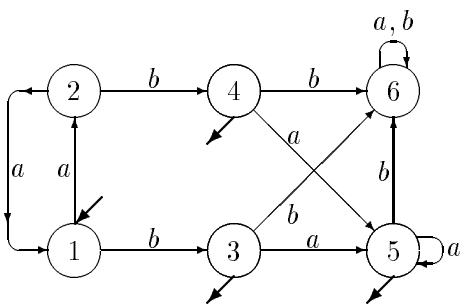
1. Calculez les résiduels $f^{-1}L$ par rapport au langage L (pour tout $f \in X^*$).
2. Soit l'équivalence syntactique θ_L sur X^*, définie par:

$$f \ \theta_L \ g \Longleftrightarrow f^{-1}L = g^{-1}L$$

   Donnez pour chacune des classes d'équivalence $[u]$ ($u \in X^*$) de la relation θ_L:

   - une expression rationnelle,
   - un représentant de longueur minimale de cette classe,
   - une expression rationnelle pour le résiduel $v^{-1}L$ associé à tous les mots $v \in [u]$.

3. Soit l'automate fini déterministe $\mathcal{A}$, donné par le schéma suivant:



On admettra qu'il reconnaît le langage L. On définit l'équivalence $\theta_{\mathcal{A}}$ sur X^* par:

$$f \ \theta_{\mathcal{A}} \ g \Longleftrightarrow \delta(1, f) = \delta(1, g)$$

où δ est la fonction de transition de l'automate $\mathcal{A}$ plus haut.

Donnez pour chacune des classes d'équivalence de la relation $\theta_{\mathcal{A}}$:

- une expression rationnelle,
- un représentant de longueur minimale de cette classe.

4. Exprimez chacune des classes de la relation θ_L comme une union de classes de la relation $\theta_{\mathcal{A}}$.

   Quelle conséquence en déduire sur les relations $\theta_{\mathcal{A}}$ et θ_L?

   Quelle conséquence en déduire sur l'automate $\mathcal{A}$?

5. Déduire des résultats sur la relation θ_L l'automate minimal reconnaissant L,

   $$\mathcal{A}_{\theta_L} = (X, S, s_0, F, \delta_{\theta_L})$$

   en précisant chacun des éléments de ce quintuplet (sauf X, bien entendu ...).

6. Donnez un graphe pour l'automate $\mathcal{A}_{\theta_L}$.

– II –

On considère sur l'alphabet $X = \{a, b\}$, le langage:

$$L = \{f \in X^* : |f|_a = |f|_b\}$$

et le langage de Dyck:

$$D = \{f \in X^* : |f|_a = |f|_b \text{ et } \forall g, h \in X^*, f = gh \Rightarrow |g|_a \geq |g|_b\}.$$

8. Donnez tous les mots de longueur 4 du langage L. Précisez ceux qui sont des mots de D.

9. On considère le mot $f = aaabbbbaba$. Est-il dans L? Montrez qu'il s'écrit de façon unique sous la forme $f = aubv$ avec $u \in D$ et $v \in L$.

10. Montrez que cette propriété est vraie pour tout $f \in aX^* \cap L$.

    En déduire par analogie (on ne demande pas la preuve) une décomposition unique pour les mots de $bX^* \cap L$ qui met en jeu un langage $\bar{D}$ (analogue à D).

11. On rappelle que la grammaire du langage de Dyck est $G_D = (X, S, P)$ où $P = \{D \to \epsilon + aDbD\}$. En déduire une grammaire de $\bar{D}$, puis de L. Démontrer que cette dernière engendre L.

12. Montrez que la grammaire pour L n'est pas ambiguë (on admettra que les grammaires pour D et $\bar{D}$ ne le sont pas).

– III –

Soit $A = \{a, b\}$ et $L \subset A^*$ le langage des mots sans carré:

$$L = \{f \in A^* : \forall g, h, r \in A^*,\ f = ghhr \Rightarrow h = \epsilon\}.$$

13. Donnez les mots de L de longueur au plus 4.

14. Sauriez-vous dire (et démontrer) si L est rationnel?