Exercice 1. On considère l'équation $L = AL \cup B$, où A et B sont des langages donnés et L est le langage à trouver.

1. (a) Montrez que A^*B est une solution de l'équation.
   (b) Montrez que tout langage solution de l'équation contient le langage A^*B.
   (c) Donnez un exemple de langages A, B avec $\epsilon \in A$ et une solution $A^*B \subset L$ (inclusion stricte) de l'équation pour ces langages.
   (d) Montrez que si $\epsilon \notin A$ alors A^*B est la solution unique de l'équation.
2. On pose $X = \{x, y\}$, $P = \{f \in X^* : |f|_x \equiv 0 \bmod 2\}$, et $I = \{f \in X^* : |f|_x \equiv 1 \bmod 2\}$.

   Donnez les relations que doivent vérifier P et I entre eux. En déduire un système d'équations (du premier degré) et le résoudre à l'aide du point précédent.
3. Construisez un automate à deux états reconnaissant P. En déduire une expression rationelle pour P en appliquant l'algorithme de Mc Naughton Yamada sur l'automate.
4. Donnez un monoïde M, un homomorphisme $\varphi : X^* \to M$ et une partie $N \subset M$ tels que $P = \varphi^{-1}(N)$.

Exercice 2. Soit le langage défini par l'expression rationelle $K = a(a+b)^* + a(a+c)^*$. Calculez les résiduels de K. En déduire un automate reconnaissant K.

Exercice 3. On considère sur $X = \{0, 1\}$ l'application $\nu : X^* \to N$ définie par:

$$\begin{array}{rcl} \nu(f) & = & \text{le nombre dont } f \text{ est l'écriture binaire en base 2 (on admet des zéros à gauche),} \\ \nu(\epsilon) & = & 0 \end{array}$$

et le langage $L_p = \{f \in X^* : \nu(f) \equiv 0 \bmod p\}$.

1. Donnez un monoïde M, un homomorphisme $\varphi : X^* \to M$ et une partie $N \subset M$ tels que $L = \varphi^{-1}(N)$.
2. L'application ν est-elle un morphisme? Calculez $\nu(fh)$, pour $f, h \in X^*$.
3. On définit sur X^*, pour un entier p donné, une relation ρ_p définie par:

   $$f \rho_p h \Leftrightarrow \nu(f) \equiv \nu(h) \bmod p.$$

   Montrer que ρ_p est une équivalence régulière saturant l'équivalence syntaxique associée au langage L_p.
4. Construisez l'automate $\mathcal{A}_{\rho_p}$ associé à la relation ρ_p.
5. Montrer que si p est impair alors ρ_p est léquivalence syntaxique, c'est-à-dire que $\mathcal{A}_{\rho_p}$ est l'automate minimal pour L_p.

Exercice 4. On considère le langage $L = a^*ba^*$ (sur $X = \{a, b\}$).

1. Calculez les résiduels $f^{-1}L$ par rapport au langage L (pour tout $f \in X^*$).
2. Soit l'équivalence syntactique θ_L sur X^*, définie par:

   $$f \ \theta_L \ g \Longleftrightarrow f^{-1}L = g^{-1}L$$

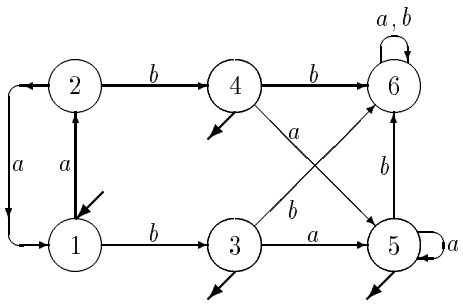
   Donnez pour chacune des classes d'équivalence $[u]$ ($u \in X^*$) de la relation θ_L:

   – une expression rationnelle,

Dernière mise-à-jour – 9 décembre 1996

- un représentant de longueur minimale de cette classe,
- une expression rationnelle pour le résiduel $v^{-1}L$ associé à tous les mots $v \in [u]$.

3. Soit l'automate fini déterministe $\mathcal{A}$, donné par le schéma suivant:



On admettra qu'il reconnaît le langage L. On définit l'équivalence $\theta_{\mathcal{A}}$ sur X^* par:

$$f \ \theta_{\mathcal{A}} \ g \Longleftrightarrow \delta(1, f) = \delta(1, g)$$

où δ est la fonction de transition de l'automate $\mathcal{A}$ plus haut.

Donnez pour chacune des classes d'équivalence de la relation $\theta_{\mathcal{A}}$:

- une expression rationnelle,
- un représentant de longueur minimale de cette classe.

4. Exprimez chacune des classes de la relation θ_L comme une union de classes de la relation $\theta_{\mathcal{A}}$.

   Quelle conséquence en déduire sur les relations $\theta_{\mathcal{A}}$ et θ_L ?

   Quelle conséquence en déduire sur l'automate $\mathcal{A}$?

5. Déduire des résultats sur la relation θ_L l'automate minimal reconnaissant L,

$$\mathcal{A}_{\theta_L} = (X, S, s_0, F, \delta_{\theta_L})$$

en précisant chacun des éléments de ce quintuplet (sauf X, bien entendu ...).

6. Donnez un graphe pour l'automate $\mathcal{A}_{\theta_L}$.