Exercice 1. Pour chacun des langages suivants sur l'alphabet $X = \{a, b\}$, construire un automate fini déterministe le reconnaissant.

1. $\{w \in X^* : |w|_a$ pair et $|w|_b$ impair$\}$
2. $\{w \in X^* : |w|_a \equiv 0 \ mod \ p\}$
3. $\{a^m b^n : m + n \equiv 0 \ mod \ p\}$
4. $\{w \in X^* : |w|_a \equiv |w|_b \ mod \ p\}$

(p est un entier positif fixé).

Exercice 2. Soit $\mathcal{A}_n = (X, Q, D, A, \delta)$ l'automate fini non déterministe à n états défini par

$$X = \{0, 1\},\ Q = \{0, 1, ..., n-1\},\ D = A = \{0\}$$

$$\delta = \{(i, 0, 0), (i, 0, i) : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(i, 1, i+1) : 0 \leq i < n-1\} \cup \{(n-1, 1, 0)\}$$

1. Donner une représentation de cet automate. Le déterminiser.
2. Montrer formellement que tous les $2^n - 1$ états de l'automate déterminisé sont tous accessibles à l'état initial.

Exercice 3. Montrer que si L sur X est reconnaissable, il en est de même pour chacun des langages suivants :

1. $FG(L) = \{w \in X^* : wX^* \cap L \neq \emptyset\}$
2. $FACT(L) = \{w \in X^* : X^* w X^* \cap L \neq \emptyset\}$
3. $\tilde{L} = \{\tilde{w} : w \in L\}$
4. $\sqrt{L} = \{w \in X^* : ww \in L\}$

Exercice 4. Soient L et M deux langages sur X, on appelle *quotient à droite* de L par M le langage :

$$LM^{-1} = \{v \in X^* : \exists u \in M \text{ tel que } vu \in L\}$$

1. soit $X = \{a, b\}, L_1 = \{a^n b^n : n \geq 0\}, L_2 = b^*$. Calculer $L_1 L_2^{-1}$ et $L_2 L_1^{-1}$. Sont-ils rationnels?
2. Montrer que si L est rationnel, il en est de même pour LM^{-1}, quelque soit M.

Exercice 5. On considère deux automates déterministes complets $\mathcal{A}_1 = (X, Q_1, \{q_1^0\}, \delta_1, A_1)$ et $\mathcal{A}_2 = (X, Q_2, \{q_2^0\}, \delta_2, A_2)$ reconnaissant L_1 et L_2 respectivement. Posons $\mathcal{A} = (X, Q_1 \times Q_2, (q_0^1, q_0^2), \delta, A)$, où δ est définie par :

$$\delta((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x)),\ \forall x \in X$$

1. Prouver que, pour $\forall w \in X^*, \forall (q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$, on a :

$$\delta((q_1, q_2), w) = (\delta_1(q_1, w), \delta_2(q_2, w))$$

2. Quelles valeurs faut-il choisir pour $A \subset Q_1 \times Q_2$, pour que $\mathcal{A}$ reconnaisse $L_1 \cap L_2$ ou $L_1 \cup L_2$? En déduire que la famille $Rec(X^*)$ est fermée pour les opérations $\cap$ et $\cup$.

Dernière mise-à-jour – 15 novembre 1996