Exercice 1. On convient d'utiliser les primitives ADD, SUB, $MULT$ et DIV pour écrire les fonctions arithmétiques sur les entiers. De plus, on convient d'écrire, par exemple, $x + y$ sous la forme $(ADD\ x)y$. Ecrivez les λ-termes qui correspondent aux expressions suivantes et donnez leurs représentations arborescentes:

1. $3 + 5$,
2. $x^2 - 3 + k$,
3. la fonction $x \mapsto x^2 - 3$,
4. la fonction $x \mapsto x^2 - 3 + k$ où k est une constante supposée fixée,
5. la fonction $(x, k) \mapsto x^2 - 3 + k$.

Exercice 2. Donnez un λ-termequi permet de calculer la fonction $f(x, y) = x + 3y$. Calculez, par β-réductions appliquées à un terme approprié, la valeur de la fonction en $x = 2$ et $y = 3$.

Exercice 3. Réduisez, par β-réductions, les termes suivants. On appliquera au besoin des α-conversions pour distinguer les occurences libres et liées d'une même variable:

1. $\lambda z.((\lambda u.(uz))z)(\lambda t.(tx))$
2. $(\lambda y.(x((\lambda x.xy)(xyz)))(xy))$
3. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

Exercice 4.

1. Construisez un λ-terme P qui correspond à l'opérateur, qui à un couple de fonctions (f, g) associe la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$.
2. De la même manière, construisez un λ-terme M qui correspond à l'opérateur, qui à un couple de fonctions (f, g) associe la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.
3. En utilisant l'identité $SUB\ (ADD\ f)f)f \equiv f$, montrez que les opérateurs M et P satisfont l'identité $M(P(f, f), f) = f$.

Exercice 5. Donnez si possible, des exemples de typage des λ-termes

1. $x(yx)$
2. $(xy)x$
3. $(xy)z$
4. $x(yz)$

Les deux derniers λ-termes peuvent-ils être typés simultanément?

Exercice 6. Le λ-terme $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ peut-il être typé?

Exercice 7.

1. Donner le λ-terme correspondant à l'expression $E : y(x * x) + y(x)$ et préciser son type.
2. Donner le λ-terme correspondant à l'expression $P : x \mapsto 2x + 3x^2 + 4$ et préciser son type.
3. Vérifier le typage du λ-terme $(\lambda y.(\lambda x M)P)4$. A quoi correspond ce terme?

Exercice 8. Donner le type des opérateurs M et P plus haut. Vérifiz les types des expressions $M(f, g)$ et $M(P(f, g), h)$.