Exercice 1. Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$ et le système de réécriture $\mathcal{R}_1 = \{(ab, bbba), (ba, a), (aa, bbbb), (bb, a)\}$. Réécrire le mot $baba$ à a.

Exercice 2. Soit $A = \{rouge, noir\}$ et le système de réécriture

$$\mathcal{R}_3 = \{(noir\ rouge, noir), (rouge\ noir, noir), (noir\ noir, rouge)\}.$$

Réduire le plus possible le mot

$$rouge\ rouge\ noir\ noir\ rouge\ rouge\ noir\ noir.$$

Exercice 3. Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$ et le système de réécriture $\mathcal{R}_2 = \{(ab, 1), (ba, 1)\}$. Montrer qu'un mot w peut être réécrit en le mot vide si et seulement si $|w|_a = |w|_b = n$.

Exercice 4. Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$ et le système de réécriture $\mathcal{R}_2 = \{(ba, ab)\}$. Montrer qu'un mot w peut être réécrit sous la forme $a^n b^n$ si et seulement si $|w|_a = |w|_b = n$.

Exercice 5. Considérons l'ensemble des expressions "correctes" de dérivation (on formalisera plus tard cette notion). Soit le système de réécriture suivant où x est une variable et c une constante arbitraire:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_4 \quad = \quad & \{(dc, 0), (dx, 1),\\ & (d(u+v), (du+dv),\\ & (d(uv), (u(dv)+v(du)),\\ & (d(-u), -d(u)),\\ & (d(u-v), d(u)-d(v)),\\ & (d(u/v), ((du)v-u(dv))/v^2)\}\end{aligned}$$

Réduire $d(d(uv)+d(u/v))$.

Exercice 6. Montrer que si un système de réécriture est noethérien, alors $\xrightarrow{*}$ induit un ordre sur les mots.

Exercice 7. Montrer que $\xleftrightarrow{*}$ est une relation d'équivalence (et même une congruence). Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_2$?

Exercice 8. Montrer qu'un système de réécriture localement confluent et noethérien est confluent.

Exercice 9. Les systèmes de réécriture ci-dessus sont-ils noethériens, confluents?

Exercice 10. Montrer que la confluence implique la propriété de Church-Rosser.

Exercice 11. Montrer que si un système de réécriture est confluent, alors le réduit d'un élément, s'il existe, est unique. Dans le cas où il est noethérien, alors il existe un réduit unique pour chaque classe de congruence.

Dernière mise-à-jour – 18 octobre 1996

Par exemple, voir que *ba* et *bba* sont dans la même classe de congruence par rapport à $\mathcal{R}_1$. Quel est leur réduit unique?

Exercice 12. On peut étendre ou contraindre les systèmes de réécriture. Par exemple avoir un nombre infini de règles: soit $A =$ l'ASCII, que font les systèmes de réécriture suivants $\{(w@u, w\%u) | u, w \in A^*\}$, $\{(awwb, ab) | w \in A^*, a, b \in A)\}$?