ENSERB, seconde année — DEA Informatique
Mars 1997 — J.Bétréma

Formule de Lagrange

On considère les *arbres plans*, ie. les arbres dont chaque sommet possède un nombre variable k de fils, avec un ordre sur les fils; si $k = 0$, le sommet est une feuille. Le nombre de tels arbres, avec n arêtes, est le nombre de Catalan C_n.

On code un arbre par un parcours *préfixe* : le mot associé commence par l'arité $\mathbf{k}$ de la racine, suivie du code du premier fils, puis du code du second fils, etc. L'alphabet A utilisé pour ce codage est donc l'ensemble des entiers naturels, que dans la suite on écrira en gras, pour ne pas les confondre avec d'autres usages de ces mêmes entiers :

$$A = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{k}, \ldots\}$$

La série formelle L (en variables non commutatives) associée à ce codage commence donc par :

$$L = \mathbf{0} + \mathbf{10} + \mathbf{200} + \mathbf{110} + \ldots$$

Par abus de langage, on dira par la suite que tout mot sur A^* qui code un arbre, "appartient" à L.

1. Ecrire les cinq termes suivants de la série L. Donner deux façons distinctes de lire le nombre d'arêtes (de l'arbre associé) sur un mot de L.

2. Tout mot $u \in L$ s'écrit par définition :

   $$u = \mathbf{k} v_1 v_2 \ldots v_k$$

   où chaque v_i est un mot de L. Montrer que cette écriture est unique en donnant (en langage C) un algorithme (linéaire, en une seule passe) qui calcule la décomposition ci-dessus (et, en prime, décide si $u \in L$).

   En déduire que la série L vérifie l'équation :

   $$L = \sum_{k \geq 0} \mathbf{k} L^k \tag{1}$$

3. Comment retrouver la série énumérative des arbres plans à partir de l'équation (1) ?

4. On considère la série formelle $f(t) = \sum a_k t^k$, on remplace dans L chaque lettre $\mathbf{k} \in A$ par $a_k t$, ce qui transforme la série L en une série $g(t) = \sum b_k t^k$. Ecrire les premiers termes de la série $g(t)$; montrer qu'on a :

   $$g(t) = t f(g(t)) \tag{2}$$

   Montrer que la solution ainsi obtenue de l'équation (2) (où l'inconnue est la série g), est unique.

5. Comparer b_n et le terme de degré $n-1$ dans $f^n(t)$, pour $n = 1, 2, 3$; en déduire une conjecture pour la valeur de b_n; prouver cette conjecture, en utilisant le principe de Raney.