Dea d'Informatique, 1997-98
Algorithme et Combinatoire
Problème

Descentes et excédents
Les permutations sont notées ici sous la forme

$$\alpha = a_1, a_2, \ldots, a_n$$

Un entier $i < n$ est une *descente* si $a_i > a_{i+1}$, c'est un *excédent faible* si $a_i \geq i$ et un *excédent fort* si $a_i > i$. On note $D(\alpha)$ le nombre de descentes de la permutation α, et $E(\alpha), F(\alpha)$ le nombre de ses excédents faibles et forts. Le nombre de permutations sur n éléments ayant k descentes est noté $d_{n,k}$, de même $e_{n,k}$ et $f_{n,k}$ désignent le nombre de celles ayant k excédents faibles et k excédents forts respectivement.

Question 1. Donner pour toutes les permutations sur 4 éléments le nombre de leurs descentes, et excédents forts et faibles. En déduire les valeurs de $d_{n,k}$, $e_{n,k}$ et $f_{n,k}$ pour $n \leq 4$.

Question 2. Montrer que $d_{n,0} = d_{n,n-1} = 1$ et que pour tout $k < n$ on a:

$$d_{n,k} = d_{n-1-k}$$

Quel est le nombre moyen de descentes dans une permutation?

Question 3. Soit α une permutation quelconque, quelle est la relation entre $F(\alpha)$ et $E(\alpha^{-1})$? En déduire que

$$e_{n,k} = f_{n.n-k}$$

Question 4. Montrer que $E(\alpha) \geq z(\alpha)$ où $z(\alpha)$ est le nombre de cycles de la permutation α.

On rappelle que la *correspondance de Foata* associe à toute permutation α une permutation $\hat{\alpha}$ obtenue en écrivant α sous forme d'un produit de ses cycles de façon telle que le plus grand élément de chaque cycle est en tête et que les cycles sont rangés dans l'ordre des éléments les plus grands croissants; on supprime ensuite les parenthèses de l'écriture pour obtenir $\hat{\alpha}$.

Question 5. Donner $\hat{\alpha}$ pour

$$\alpha = 2, 7, 1, 5, 6, 4, 3, 9, 12, 10, 13, 8, 14, 11$$

Quelle est la permutation β telle que $\hat{\beta} = \alpha$?

Question 6. Montrer que

$$D(\hat{\alpha}) = n - E(\alpha)$$

Déduire de tout ce qui précède:

$$e_{n,k} = f_{n,n-k} = d_{n,n-k-1} = d_{n,k}$$

Question 7. Établir une relation de récurrence qui exprime $d_{n,k}$ en fonction de $d_{n-1,k}$ et $d_{n-1,k-1}$.

Question 8 Déduire de la question précédente une relation de récurrence pour les polynômes $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} d_{n,k} x^k$ qui utilise les dérivées de ceux-ci. Calculer $D_n(x)$ pour $n \leq 7$.