Jean-Loup BOURDIN
Nicolas DARNIS

Université de Bordeaux I

Algorithmique et combinatoire

T.P.3 : Tableaux de Young

Professeur: R. CORI

D.E.A. Informatique
Année 1997-1998

Partie 1. Sous-suites croissantes

Question 1.

Le tableau suivant donne, pour toutes les permutations sur 3 éléments, leurs sous-suites croissantes:

α	sous-suites
$1, 2, 3$	1,2,3
$1, 3, 2$	1,2; 1,3
$2, 1, 3$	2,3; 1,3
$2, 3, 1$	1,2
$3, 1, 2$	2,3
$3, 2, 1$	0

Question 2.

Soit la permutation

$$\alpha = 7, 2, 3, 6, 1, 8, 5, 4, 10, 9$$

Une sous-suite croissante de longueur 5 est

$$2, 3, 4, 6, 9$$

En appliquant l'algorithme de Robinson-Schenstedt à α nous obtenons les tableaux P et Q suivants:

$P =$

7				
6				
2	5	10		
1	3	4	8	9

$Q =$

8				
5				
2	7	10		
1	3	4	6	9

La longueur de la première ligne des tableaux obtenus est 5.

Question 3.

Nous allons démontrer la propriété par récurrence sur i:

- Pour $i = 1$ la propriété est vraie: $\alpha = \epsilon$, nous ajoutons a_1 en position m_1 dans P_0 et nous obtenons P_1 avec comme seule case a_1. Or a_1 forme bien une sous-suite croissante de longueur 1 de α.

- Supposons la propriété vraie pour tout i.
- Montrons qu'elle est aussi vraie pour $i+1$: On fait rentrer a_{i+1} en position m_{i+1} dans la première ligne du tableau P_i pour former P_{i+1}. Or, on sait que dans P_i, on a une sous-suite croissante de longueur m_i dans $a_1, a_2, ..., a_i$ dont le dernier élément est a_i. Puisque $a_{i+1} > a_i$, dans P_{i+1} on a une sous-suite croissante de longueur $m_i + 1$ dans $a_1, a_2, ..., a_i, a_{i+1}$ dont le dernier élément est a_{i+1}.

Question 4.

```
Sous_suite_croissante( Permutation alpha, Permutation s )
{
    Tableau_de_Young P[n] /* n est le nombre d'elements de alpha */
    RS( alpha, P )
    max := n

    Pour c de nb[1] a n
        k := P[1][c]
        TantQue k < max et k a un suivant
                k := suivant(k)
        FinTQ
        s[c] := k /* s represente la plus grande sous-suite croissante de alpha */
        max := k
    FinPour
}

RS( Permutation alpha, Tableau_de_Young P )
{
    Pour i de 1 a n
        Ajouter( alpha[i], 1, P )
    FinPour
}

Ajouter( element x, ligne i, Tableau_de_Young P )
{
    j := nb[i]
    TantQue ( j > 0 et x < P[i][j] ) j--
    Si j = nb[i]
        P[i][j+1] := x
        nb[i]++
        renvoyer x
    Sinon
        y := P[i][j+1]
        P[i][j+1] := x
        z := Ajouter( y, i+1, P )
        Initialiser le suivant de P[i][j+1] avec z
    FinSi
}
```

Question 5.

Nous allons démontrer la propriété par récurrence sur i.

- La propriété est vraie pour $p = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour p.
- Montrons qu'elle est aussi vraie pour $i + 1$: On distingue deux cas:
  - On ajoute un élément a_{p+1} supérieur au dernier élément de la première ligne du tableau. Dans ce cas, on augmente la taille de la sous-suite croissante de 1 et puisqu'on laisse l'élément en fin de ligne, on augmente aussi de 1 la longueur de la première ligne du tableau.
  - On ajoute un élément a_{p+1} inférieur à un élément de la première ligne du tableau. Dans ce cas, a_{p+1} ne peut pas agrandir la taille de la plus grande sous-suite croissante et donc la taille de la sous-suite croissante ne peut pas augmentée. Et puisque a_{p+1} va faire monter un élément de la première ligne du tableau vers la deuxième ligne, la longueur de la première ligne du tableau restera inchangée.

Donc, il ne peut exister de sous-suite croissante de longueur supérieure à p dans α.

Partie 2. Formule des equerre

Question 1.

Les quatre chemins maximaux ayant pour origine $(2, 1)$ sont:

- $(2, 1)(2, 2)(3, 2)$ dont le poids est: $\omega = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$
- $(2, 1)(4, 1)$ dont le poids est: $\omega = \frac{1}{3}$
- $(2, 1)(3, 1)(3, 2)$ dont le poids est: $\omega = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- $(2, 1)(3, 1)(4, 1)$ dont le poids est: $\omega = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

La somme de ces poids est donc:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Question 2.

Question 3.

- Poids des trois éléments maximaux:

$$\begin{array}{rcl}
\omega_{(4,1)} & = & \omega((4,1)) + \omega((1,1)(2,1)(3,1)(4,1)) + \omega((1,1)(2,1)(4,1)) \\
& + & \omega((1,1)(3,1)(4,1)) + \omega((1,1)(4,1)) + \omega((2,1)(3,1)(4,1)) \\
& + & \omega((2,1)(4,1)) + \omega((3,1)(4,1)) \\
& = & 1 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\
& = & \frac{12}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\omega_{(3,2)} & = & \omega((1,1)(2,1)(3,1)(3,2)) + \omega((1,1)(3,1)(3,2)) + \omega((2,1)(3,1)(3,2)) \\
& + & \omega((1,1)(1,2)(2,2)(3,2)) + \omega((1,1)(1,2)(3,2)) + \omega((2,1)(2,2)(3,2)) \\
& + & \omega((3,1)(3,2)) + \omega((2,2)(3,2)) + \omega((1,2)(3,2)) \\
& + & \omega((1,2)(2,2)(3,2)) + \omega((1,1)(2,1)(2,2)(3,2)) + \omega((3,2)) \\
& = & \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \\
& + & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} + 1 \\
& = & 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\omega_{(1,3)} & = & \omega((1,1)(1,2)(1,3)) + \omega((1,1)(1,3)) + \omega((1,2)(1,3)) + \omega((1,3)) \\
& = & \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 \\
& = & \frac{8}{5}
\end{array}$$

La somme des poids des trois éléments maximaux est:

$$\frac{12}{5} + 4 + \frac{8}{5} = 8$$

- Calculons la somme des poids des chemins ayant une extrémité qui soit un élément maximal:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \omega(u_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \underbrace{\omega(c_i)}_{\text{poids des chemins maximaux d'origine } c_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{i=n} 1}_{\text{d'après la question 2}} = n$$

Question 4.

D'après la définition de $\omega(T)$, on a:

$\omega(T) = \omega(8) \times \omega(T')$ avec $T' =$

7		
5		
3	4	
1	2	6

Donc, $\omega(T) = \omega(8) \times \omega(7) \times \omega(T'')$ avec $T'' = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & & \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline \end{array}$

Donc, si on continue jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une case, on obtient:

$$\begin{aligned} \omega(T) &= \omega(8) \times \omega(7) \times ... \times \omega(1) \\ &= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 8! \\ &= 40320 \end{aligned}$$

Question 5.

- C'est vrai pour $n = 1$ car $\omega(T) = 1 = 1!$
- On suppose que c'est vrai pour n. Donc $\omega(T) = n!$
- Montrons-le pour $n + 1$.

  $\omega(T_{n+1}) = \omega_{n+1} \times \omega(T)$ d'après la définition (et $n + 1$ est forcément maximal).

  Donc:

  $$\omega(T_{n+1}) = \underbrace{n+1}_{\text{d'après la question 3}} \times \omega(T)$$

  D'où:

  $$\omega(T_{n+1}) = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

  Donc la propriété est vraie quelque soit n.

Question 6.

a)

$$\gamma = f_1, f_2, ..., f_k$$

- f_{i+1} est un successeur de f_i pour $1 \leq i \leq k - 1$ Donc, on a:

  $$f_1 = (x_1, y_1) \preceq (x_i, y_i) = f_i, \forall i \geq 2$$

  D'où:

  $$x_1 \leq x_i, \forall i \geq 2$$

  et

  $$y_1 \leq y_i, \forall i \geq 2$$

  Or, a_1 est le minimum des $x_i \Rightarrow a_1 = x_1$ et b_1 est le minimum des $y_i \Rightarrow b_1 = y_1$. On a donc bien:

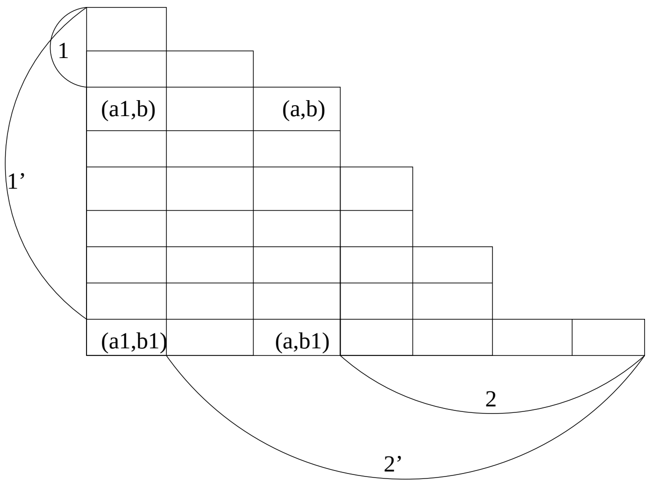
  $$f_1 = (x_1, y_1) = (a_1, b_1)$$

- $f_k = (x_k, y_k) \succeq (x_i, y_i) = f_i, \forall i < k$
  D'où:
  $$x_k \geq x_i, \forall i < k$$
  et
  $$y_k \geq y_i, \forall i < k$$

  Or, a_p est le maximum des $x_i \Rightarrow a_p = x_k$ et b_q est le maximum des $y_i \Rightarrow b_q = y_k$. On a donc bien:
  $$f_k = (x_k, y_k) = (a_p, b_q)$$

- k est la longueur du chemin γ.
  Si $k = 1$, on a forcément $p = q = 1$ donc $p + q - 1 = 1 = k$.
  Si maintenant on a un chemin de longueur k quelconque. Si on augmente le longueur de γ de α (sa nouvelle longueur est donc: $k + \alpha$), puisque l'élément ajouté à γ est un succeseur, soit on augmente p de α, soit on augmente q de α. Quelque soit le cas, on obtient bien $p+q+\alpha-1 = k+\alpha$.

b) On a la situation suivante:



On a donc:

- $|\sigma(a_1, b)| = a - a_1 + 1$
- $|\sigma(a, b_1)| = b - b_1 + 2$
- $|\sigma(a, b)| = 1' + 2'$

Or, $1' + 2' = 1 + (b - b_1) + 2 + (a - a_1)$ d'où:

$$|\sigma(a, b)| = |\sigma(a_1, b)| + |\sigma(a, b_1)|$$

Question 7.

Question 8.

Question 9.

Question 10.