N° d'ordre : 1663

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Par **Philippe Blasi**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Simulation de la diffusion de la lumière et des gaz par techniques de Monte Carlo

Soutenue le : Jeudi 19 décembre 1996

Après avis de : Kadi Bouatouch .... Rapporteurs
Michel Mériaux ....

Devant la Commission d'examen formée de :

Pascal Guitton	....	Professeur	Président
Kadi Bouatouch	....	Professeur	Examinateur
Michel Mériaux	....	Professeur	Examinateur
Bertrand Le Saëc	....	Professeur	Examinateur
Gérard Vignoles	....	Maître de conférences	Examinateur
Christophe Schlick	....	Maître de conférences	Rapporteur

— 1996 —

Résumé

La synthèse d'images réalistes nécessite la modélisation précise des interactions de la lumière avec la matière (réflexion, réfraction, diffusion) et des échanges d'énergie lumineuse entre les objets de la scène. Cette modélisation, très complexe si l'on ne fait pas d'hypothèses restrictives, peut être efficacement réalisée par simulation de Monte Carlo.
Dans le présent travail, nous définissons tout d'abord une méthode complète d'illumination de scène, fondée sur une simulation de Monte Carlo d'un modèle "particulaire" de la lumière. Dans un premier temps, nous développons cette simulation pour les milieux participants. Nous diminuons la variance de la simulation par un calcul exact de l'absorption. Nous étendons ensuite ce travail aux objets surfaciques et proposons une technique de regroupement de photons pour obtenir une efficacité constante à chaque pas de calcul.
Dans la deuxième partie de ce travail, nous étudions l'application de cette méthode à la visualisation des champs scalaires tri-dimensionnels, puis l'application de certaines techniques issues de la synthèse d'images (facettisation, de données volumiques, partitionnement spatial, images de distance, ...) à la simulation de la diffusion des gaz, présentant de nombreuses similitudes avec la simulation de la diffusion de la lumière.

Mots-Clés : *Infographie, Synthèse d'Image, Simulation de Monte Carlo, Milieux Participants, Visualisation Scientifique, Diffusion des Gaz*

Abstract

Realistic image synthesis requieres an accurate modelling of the interactions of light with matter (reflection, refraction, scattering) and of luminous energy exchanges between the objects of the scene. This modelling, very complex if no restrictive assumption is made, can be efficiently fulfilled with a Monte Carlo simulation.
In the present work, we define first of all a complete scene illumination method, based on a Monte Carlo simulation of a particule model of light. First, we develop this simulation for participating media. We lower the variance of the simulation by an exact computation of the absorption. Then, we extend this work to surface objects and we propose a grouping technic of photons in order to obtain a constant efficiency for each calculation step.
In the second part of this work, we study the application of this method to the visualization of 3D scalar fields, then the application of some technics derived from image synthesis (polygonisation of volume data, spatial partitioning, distance images, ...) to the simulation of gaz diffusion which presents numerous similarities with the simulation of scattering of light.

Keywords : *Computer Graphics, Image Synthesis, Monte Carlo Simulation, Participating Media, Scientific Visualization, Gaz Diffusion*

Je tiens à adresser ici tous mes remerciements à :

- M. Pascal Guitton, pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de thèse et pour nous avoir trouvé une machine qui calcule plus vite que l'éclair.
- M. Bertrand Le Saëc, mon directeur de DEA, puis de thèse, pour avoir encadré mon travail tout au long de ces années, pour la confiance qu'il m'a témoignée et pour ses judicieuses critiques de ce document.
- M. Kadi Bouatouch, pour avoir accepté d'être mon rapporteur et pour ses remarques constructives.
- M. Michel Mériaux, pour le soin avec lequel il a examiné ce travail et pour avoir bien voulu être mon rapporteur.
- M. Gérard Vignoles, pour sa participation à ce jury de thèse et pour nous avoir initié aux joies de la diffusion des gaz.
- M. Christophe Schlick, pour avoir accepté de faire partie de ce jury de thèse.
- Gilles Subrenat, pour sa disponibilité, ses compétences de photographe d'écran et pour toutes les conversations constructives que nous avons eues.
- Luc Brun et Patrick Moreau, pour leur petite moulinette ayant permis la création des diapositives présentées lors de la soutenance.
- les membres de l'équipe graphique, pour leur sympathie.
- David, pour la relecture et la correction orthographique de ce document.
- Flying Neuneu, pour sa conversion à la moto et à l'informatique.
- Emmanuel, Richard et Christophe, pour avoir été mes amis depuis si longtemps.
- Punky, Skinny, Thoothbrush, Crawa, Gribouille, Vincent, Ludo, Hugues, Pierre, Francis, Manu, Thierry et tous ceux que j'oublie, pour tout les moments d'évasion que nous avons eus ensemble.
- Anna, pour m'avoir supporté (à tous les sens du terme) durant tout ces longs mois de rédaction et pour le simple fait d'être là.

Sommaire

Sommaire 1

Introduction 5

1 Préliminaires 9

1.1 Modélisation de la lumière 9

1.1.1 Modèle physique 9

1.1.2 Un modèle adapté à l'infographie 10

1.1.3 Angle solide 10

1.1.4 Unités de mesure des échanges énergétiques 12

1.2 Comportement de la lumière 14

1.2.1 Surfaces 15

1.2.2 Volumes 21

1.3 Les équations de rendu généralisées aux milieux participants 30

1.4 Techniques d'évaluation par des méthodes de Monte Carlo 33

1.4.1 Variable aléatoire et techniques d'échantillonnage aléatoire 33

1.4.2 Techniques d'échantillonnage aléatoire 34

1.4.3 Techniques de marche aléatoire 35

1.4.4 Intégration de Monte Carlo 36

2 Simulation de Monte-Carlo en milieux participants 39

2.1 Principe général des simulations de Monte Carlo 40

2.2 Diminution de la variance du résultat par le calcul exact de l'absorption . . 43

2.3 Choix des points de diffusion 45

2.4 Choix de la direction de diffusion 48

2.5 Implémentation 51

2.5.1 Modélisation du milieu 51

2.5.2 Stockage des énergies et des luminances 52

2.5.3 Méthode volumique 54

2.5.4 Méthode surfacique 62

2.6 Conclusion 63

3 Extension à un modèle complet d'illumination 65

3.1 Un algorithme général de simulation 66

3.2 Regroupement de photons : les paquets 68

3.3 Méthode complète de rendu 70

3.3.1 Passe d'illumination 70

3.3.2 Passe de visualisation 72

3.4 Implémentation 73

3.4.1 Modèle de réflectance 73

3.4.2 Un modèle simple de sources lumineuses 74

3.4.3 Structure de données des paquets 75

3.4.4 Stockage des énergies et des luminances 77

3.4.5 Emission de l'énergie contenue dans un paquet 77

3.5 Conclusion 81

4 Visualisation des champs scalaires tri-dimensionnels 83

4.1 Méthode de Sabella 84

4.2 Méthode fondée sur un rendu réaliste 85

4.2.1 Fonctions de phase 86

4.2.2 Sources lumineuses 86

4.2.3 Coefficient d'absorption 86

4.2.4 Coefficient de diffusion 87

4.3 Résultats 89

4.4 Extension du modèle à la couleur 91

5 Simulation de la diffusion des gaz en milieux micro-poreux 93

5.1 Préliminaires physiques 93

5.1.1 Diffusion binaire 94

5.1.2 Diffusion de Knudsen 94

5.1.3 Diffusion mixte 95

5.1.4 Nombre de Knudsen 96

5.1.5 Influence de la géométrie sur la diffusion : facteur de forme et tenseur de diffusion 96

5.1.6 Calcul du coefficient effectif de diffusion D^{eff} 97

5.2 Conditionnement des données initiales 97

5.2.1 Facettisation du milieu 97

5.2.2 Déplacement des molécules 99

5.3 Calcul des propriétés géométriques du milieu 102

5.3.1 Surface spécifique S_V 102

5.3.2 Porosité ϵ 102

5.3.3 Coefficient de diffusion D_m 102

5.4 Simulation de la diffusion 103

5.4.1 Calcul du coefficient effectif de diffusion D^{eff} 103

5.4.2 Déplacement dans un volume 103

5.4.3 Réflexion sur les surfaces 105

5.4.4 Sortie du milieu micro-poreux 106

5.4.5 Algorithme de la simulation 108

5.5 Résultats 108

5.5.1 Temps de calcul 108

5.5.2 Résultats obtenus 109

5.5.3 Précision des résultats 109

5.6 Conclusion 110

5.7 Extensions 111

Conclusion **113**

A Algorithme du calcul de l'image de distance 3D **115**

B Images et résultats **117**

B.1 Laser 117

B.2 Bureau 120

B.3 Fumée 123

Bibliographie **125**

Introduction

Un objectif majeur de la synthèse d'image est la génération d'images les plus réalistes possibles : c'est le photo-réalisme. On cherche donc à produire des images numériques indifférenciables des images obtenues par un appareil photographique.

Pour atteindre cet objectif, deux approches sont possibles :

- une approche que nous pourrions qualifier d'artistique : à l'aide d'outils informatiques, un infographiste peut aboutir à une image réaliste. Cependant, le réalisme de cette image dépend en grande partie de la compétence et du talent de la personne utilisant ces outils.
- une approche scientifique : au travers de modèles physiques proches de la réalité, on cherche à simuler les interactions de la lumière avec la matière afin d'aboutir à une image exacte. Le réalisme de l'image n'est plus mesuré qualitativement par une impression visuelle, mais quantitativement par la comparaison des valeurs calculées et des valeurs mesurées.

Ces deux approches peuvent être mises en parallèle avec la peinture et la photographie : s'il faut toute la maîtrise technique et artistique d'un peintre pour obtenir un tableau réaliste d'une scène, le commun des mortels peut obtenir un résultat similaire à l'aide d'un simple appareil photographique. L'approche scientifique ouvre la synthèse d'image à un éventail beaucoup plus vaste d'utilisateurs, et donc de domaines d'utilisations : architecture, illumination de bâtiment, modélisation de systèmes optiques...

Pour parvenir au réalisme, l'approche scientifique doit prendre en compte le plus grand nombre possible de catégories d'interactions de la lumière avec la matière et doit modéliser correctement chacune de ces catégories. Elle doit en particulier modéliser :

- toutes les interactions de la lumière à la surface de la matière, qu'elles soient spéculaires, diffuses ou mixtes.
- toutes les interactions de la lumière à l'intérieur de la matière, qu'elles soient isotropes ou non, uniques ou multiples.
- tous les échanges d'énergie lumineuse entre les objets de la scène visualisée.

- la quantité de lumière perçue par l'observateur virtuel de la scène.

Cette approche scientifique se ramène donc à un problème de physique du transport de l'énergie lumineuse entre divers objets de caractéristiques optiques hétérogènes. Les méthodes utilisées pour résoudre ce problème se divisent en deux familles :

- les méthodes utilisant les éléments finis, fondées sur la transformation d'un problème continu en un problème discret. Ceci se traduit généralement par une discrétisation des objets en éléments de caractéristiques optiques constantes et par une discrétisation des directions de l'espace. Le problème du transport est alors résolu pour chaque couple (élément,direction). En synthèse d'image, ces méthodes portent le nom de lancer de rayon [Whi80], radiosité [GTGB84][CG85], radiosité étendue [ICG86][SAWG91][LS92], méthode zonale [RT87].
- les méthodes de Monte Carlo, fondées sur l'utilisation de nombres aléatoires. Ces techniques probabilistes se divisent elles aussi en deux familles : les simulations de Monte Carlo et les intégrations de Monte Carlo. Les simulations de Monte Carlo [DW94][PM93a][SWH+95][BPZ96] reproduisent l'émission des photons depuis les sources lumineuses et leurs interactions avec les objets rencontrés. Les intégrations de Monte Carlo [CPC84][Kaj86][SW91][LW94] utilisent des techniques stochastiques d'approximation pour évaluer les équations modélisant le problème du transport de la lumière.

La première partie de notre travail se place dans le cadre de l'approche scientifique de la synthèse d'image réaliste que nous venons de présenter rapidement. Son objectif est d'une part la définition d'une méthode complète d'illumination de scène, fondée sur une simulation de Monte Carlo d'un modèle particulaire de la lumière, et d'autre part, une adaptation en vue d'une implémentation efficace. Cette technique de rendu doit traiter des scènes pouvant contenir à la fois des objets surfaciques (miroir, objets courants...) et des objets volumiques (brouillard, fumée, nuage...). Pour cela, les principales interactions de la lumière avec chacune de ces classes d'objets sont modélisées, sans hypothèses restrictives et en respectant les lois de la physique.

La deuxième partie de notre travail est une étude des applications de cette technique à des domaines autres que la synthèse d'image réaliste : la visualisation scientifique et la simulation de la diffusion des gaz.

L'objectif principal de la visualisation scientifique consiste en la création d'images facilitant l'interprétation de données numériques. Nous proposons d'établir une bijection entre les donnée à visualiser et un objet réel courant : le brouillard. Un rendu réaliste de cet objet permet alors une interprétation plus intuitive des données. Nous appliquons cette technique à la visualisation des champs scalaires tri-dimensionnels en les visualisant sous la forme de milieux participants.

La synthèse d'image réaliste a emprunté beaucoup à la physique : des modèles de réflectances pour les surfaces [CT81], des modèles de diffusion pour les volumes [Bli82], des méthodes de résolution du problème d'illumination globale [GTGB84][CPC84].... A partir de ces emprunts, elle a développé ses propres solutions pour résoudre le problème global d'illumination. Ce problème présente de nombreuses similitudes avec des problèmes de physique tels que la diffusion de la chaleur ou la diffusion des gaz. Il est intéressant d'étudier l'application des techniques développées pour la synthèse d'image à la résolution de ces problèmes. Nous appliquons certaines de ces techniques (facettisation, partitionnement spatial, images de distance) à la simulation de la diffusion des gaz en milieux micro-poreux.

Ce document se décompose en cinq chapitres :

- Nous définissons dans le premier chapitre le modèle particulaire de la lumière que nous utilisons. Nous décrivons ensuite les différentes interactions de la lumière sur les objets surfaciques et dans les objets volumiques. Cette description nous amène à la définition des équations de scènes et d'images. Nous finissons ce chapitre par l'étude du principe des méthodes de Monte Carlo que nous allons utiliser pour résoudre ces équations.

- Dans le second chapitre, nous présentons la simulation du modèle particulaire de la lumière en milieu participant. Nous débutons par une description du principe de la simulation. Nous détaillons ensuite plusieurs techniques visant à diminuer la variance du résultat de la simulation. Nous tirons de cette simulation deux méthodes de rendu pour les milieux participants dont nous décrivons l'implémentation.

- Nous étudions dans le troisième chapitre l'extension de la simulation précédente au modèle complet d'illumination, comprenant des objets surfaciques et des objets volumiques. Nous présentons une nouvelle technique permettant de diminuer la variance de la simulation. Nous finissons en détaillant l'implémentation de la méthode d'illumination issue de cette simulation.

- Le quatrième chapitre est consacré à à la visualisation des champs scalaires tridimensionnels. Cette visualisation est effectuée en appliquant judicieusement la méthode de rendu décrite au chapitre précédent.

- Nous consacrons le cinquième chapitre à la simulation de la diffusion des gaz en milieux micro-poreux. Nous utilisons pour cette simulation des techniques issues de la synthèse d'image.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Modélisation de la lumière

1.1.1 Modèle physique

Au fil des siècles, au gré des avancées de la physique, les scientifiques ont proposé différentes théories pour expliquer la nature et le comportement de la lumière. A la fin du XVII^e siècle est apparue une théorie, l'optique ondulatoire, expliquant la plupart des phénomènes visibles :

- la réflexion (miroir),
- la réfraction (déformation d'un objet plongé dans l'eau),
- la diffusion (brouillard),
- l'interférence (franges d'interférences),
- diffraction (irisation d'une tache d'huile),
- polarisation (réflexion spéculaire pure).

Cette théorie, intégrée par Maxwell à la théorie des ondes électromagnétiques, définit donc la lumière comme une onde électromagnétique, munie d'un champ magnétique et d'un champ électrique orthogonal. L'intensité de la lumière perçue par l'oeil dépend de la valeur moyenne du champs électrique. Le spectre des longueurs d'onde visibles s'étend approximativement de 380 nm à 780 nm.

Mais l'optique ondulatoire ne permettait pas d'expliquer certains phénomènes, tels l'effet photo-électrique ou l'effet Compton. Ces phénomènes purent être expliqués au début du

XX^e siècle par une nouvelle théorie : la théorie corpusculaire. Celle-ci introduit la notion de grains élémentaires de lumière indépendants les uns des autres : les photons.

Ces deux théories furent finalement unifiées en 1920 par De Broglie pour former l'optique quantique : selon le phénomène optique observé, la lumière se comporte soit comme une onde, soit comme une particule.

1.1.2 Un modèle adapté à l'infographie

En synthèse d'images réalistes, nous nous intéressons uniquement à la simulation des phénomènes optiques visibles courants. Les effets expliqués par la théorie corpusculaire, tels que l'effet photo-électrique ou l'effet Compton, ne nous sont pas nécessaires. Il est donc inutile et coûteux d'utiliser dans son entier l'optique quantique, l'optique ondulatoire étant suffisante pour décrire tous les phénomènes visibles.

La manipulation d'ondes électromagnétiques est malaisée : la complexité des équations entrant en jeu conduit à des calculs coûteux en temps et en place mémoire. De plus, les ondes électromagnétiques ne sont nécessaires que pour la modélisation des phénomènes optiques avec composition d'ondes : les interférences, la diffraction et la polarisation. La fréquence de ces trois phénomènes est beaucoup plus petite que celle des réflexions, réfractions et diffusions. Choisissant de ne pas modéliser interférences, diffractions et polarisations, nous pouvons nous ramener à un modèle plus simple combinant divers éléments provenant de l'optique géométrique, ondulatoire et quantique.

Ce modèle reprend à l'optique quantique, la notion de grain élémentaire de lumière que nous continuerons d'appeler, par commodité, photon. Nous associons à chaque photon un spectre discret de longueurs d'onde. Pour chacune d'elles, le photon transporte un quantum d'énergie. La propagation des photons dépend du milieu dans lequel ils se trouvent. Dans un milieu homogène, le déplacement est rectiligne. Par contre, dans un milieu hétérogène contenant des particules microscopiques ou macroscopiques en suspension, la direction de propagation des photons est modifiée en fonction de phénomènes dépendants de la nature des particules. A l'interface entre deux milieux, le photon incident est absorbé et de nouveaux photons sont émis. La direction d'émission de ces photons dépend de la direction du photon incident, de la géométrie de l'interface et des caractéristiques optiques des deux milieux.

1.1.3 Angle solide

Pour caractériser l'énergie reçue depuis une direction ou émise dans une direction, nous avons besoin de la notion d'angle solide. Un angle solide est l'angle au sommet d'un cône. Il correspond à l'aire interceptée par ce cône sur un hémisphère de même centre et de rayon 1, exprimée en stéradian (st). Un stéradian est l'angle solide interceptant une aire valant 1. L'aire de l'hémisphère étant de 2π, il y a $2\pi st$ dans un hémisphère. Un angle

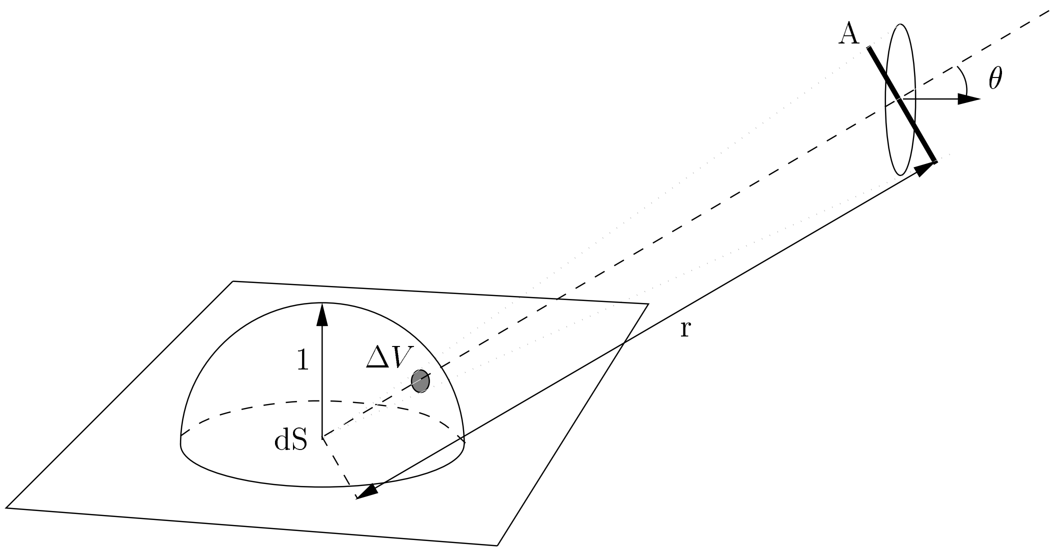


Figure 1.1 : Angle solide

solide différentiel dV exprime une direction précise de l'espace.

L'angle solide permet aussi de mesurer la part du champ de vision occupée par un objet vu d'une position donnée. L'angle solide sous-tendu par un objet d'aire A est l'aire occupée par la projection centrale de l'objet sur un hémisphère de rayon 1 centré sur le point d'observation. Cet angle peut être approximé en divisant l'aire de la projection de l'objet sur un plan perpendiculaire à la direction de vue par le carré de la distance r de l'objet au point d'observation (Figure 1.1) :

$$\Delta V \approx \frac{A \cos\theta}{r^2} \tag{1.1}$$

où A est la surface de l'objet, θ est l'angle entre la direction d'observation et la normale de la surface et r est la distance entre la surface et le point d'observation. Cette approximation n'est valable que si l'angle solide sous-tendu par l'objet est petit, c'est à dire si $A\cos\theta$ est petit par rapport à r^2. Cette condition est vérifiée dans chacun des cas suivants :

- l'objet est éloigné,
- sa surface est petite,
- son orientation est telle que θ est proche de $\frac{\pi}{2}$.

En synthèse d'image, pour exprimer une direction issue d'un point P de l'espace, on utilise généralement les coordonnées hémisphériques : à partir d'un repère orthonormé $(P, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, la direction V est donnée par l'angle polaire θ et l'angle azimutal ϕ. L'angle polaire θ, aussi appelé angle zénithal, est l'angle formé par V et $\vec{k}$. L'angle azimutal ϕ est l'angle formé par $\vec{\imath}$ et la projection de V sur le plan $(P, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

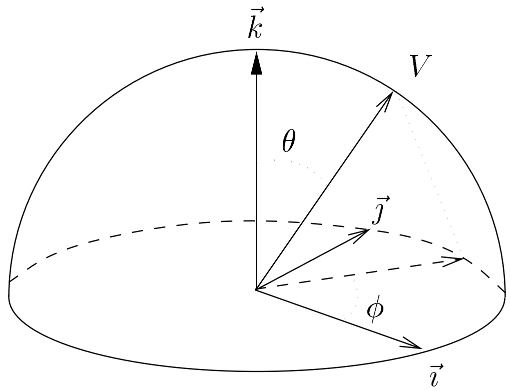


Figure 1.2 : Coordonnées hémisphériques

L'angle solide différentiel autour de la direction (θ, ϕ) est donné par l'aire différentielle sur la sphère :

$$dV = \sin\theta d\theta d\phi \tag{1.2}$$

1.1.4 Unités de mesure des échanges énergétiques

Les quatre grandeurs introduites dans ce paragraphe, flux énergétique, intensité énergétique, luminance énergétique et éclairement énergétique, sont définies pour chaque longueur d'onde λ du spectre. La valeur totale sur le spectre de ces longueurs d'onde pour une grandeur G est :

$$G = \int_{\lambda=0}^{\infty} G_\lambda d\lambda \tag{1.3}$$

où G_λ est la grandeur associée la longueur d'onde λ.

Cette dépendance à la longueur d'onde sera par la suite sous-entendue et ne sera donc pas nécessairement rappelée.

Ces quatre grandeurs sont des grandeurs radiométriques. Elles ne tiennent pas compte de la réponse du système visuel humain, qui n'est pas la même toutes les longueurs d'ondes. Cette réponse varie selon les individus et les conditions d'observation (vision de jour ou de nuit). Une fonction standard de réponse spectrale $V(\lambda)$ a été définie pour caractériser la réponse humaine moyenne en vision de jour [SP94]. Elle permet de dériver pour chaque grandeur radiométrique une grandeur photométrique tenant compte cette réponse.

Pour calculer les échanges énergétiques dans une scène, il faut pouvoir mesurer la quantité d'énergie lumineuse émise par chaque objet. Cette émission n'étant pas instantanée, elle est exprimée par unité de temps.

1.1.4.1 Flux énergétique

Le flux énergétique F (*radiant flux* en anglais), aussi appelé puissance énergétique, est l'énergie émise par un objet dans la sphère des directions $\mathcal{V}$ par unité de temps. Il est exprimé en watt (W).

Le flux énergétique ne fait pas intervenir la notion de direction d'émission de l'énergie. Il ne peut donc être utilisé pour qualifier les échanges d'énergie entre deux objets.

La grandeur photométrique correspondante est le flux lumineux, aussi appelé puissance lumineuse, exprimé en lumens (lm).

1.1.4.2 Intensité énergétique

L'intensité énergétique I (*radiant intensity* en anglais) est le flux énergétique émis dans une direction donnée dans un angle solide unitaire. Elle est exprimée en W/st.

Le flux énergétique F peut s'exprimer en fonction de l'intensité énergétique I :

$$F = \int_{V \in \mathcal{V}} I(V) dV \tag{1.4}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \tag{1.5}$$

La grandeur photométrique correspondante est l'intensité lumineuse, exprimée en candélas ($cd = lm/st$).

Le flux énergétique et l'intensité énergétique ne correspondent pas à la perception visuelle. Si on observe deux objets de même intensité énergétique, mais d'aires apparentes différentes, celui qui a la plus petite surface apparente semblera le plus lumineux. Ceci est dû au fait que l'œil est sensible non pas à une information surfacique comme le flux énergétique ou l'intensité énergétique, mais une information ponctuelle ne dépendant pas de la surface de l'objet : la luminance énergétique.

1.1.4.3 Luminance énergétique

La luminance énergétique L (*radiance* en anglais) est l'intensité énergétique par unité d'aire projetée (sur le plan perpendiculaire à la direction d'émission) exprimée en $W/(st.m^2)$. C'est la grandeur correspondant à la perception visuelle.

L'intensité énergétique I émise par une surface dans une direction V peut s'exprimer en fonction de la luminance énergétique L de chaque point P de la surface S :

$$I(V) = \int_{P \in S} L(P,V) \underbrace{\cos\theta dP}_{aire\ projet\acute{e}e} \tag{1.6}$$

où $\cos\theta = (N.V)$ avec N la normale de la surface S.

En utilisant l'équation 1.5, on peut exprimer le flux énergétique F d'une surface S en fonction de la luminance énergétique L :

$$F = \int_{P \in S} \int_{V \in \mathcal{V}} L(P,V) \cos\theta dP dV \tag{1.7}$$

La grandeur photométrique correspondante est la luminance lumineuse, exprimée en candélas par mètre carré ($cd/m^2 = lm/(st.m^2)$).

1.1.4.4 Eclairement énergétique

L'éclairement énergétique E (*irradiance* en anglais), aussi appelée densité de flux énergétique incident, est la luminance énergétique incidente en un point P d'une surface. C'est le flux incident par unité d'aire non projetée. Elle est exprimée en W/m^2.

L'éclairement énergétique E en un point P d'une surface s'exprime en fonction de la luminance énergétique incidente en ce point :

$$E = \int_{V \in \mathcal{V}} L(P,V) \cos\theta dV \tag{1.8}$$

La grandeur photométrique correspondante est l'éclairement lumineux, exprimée en lm/m^2, aussi appelé Lux.

1.2 Comportement de la lumière

Dans le vide, la lumière se propage sans atténuation en ligne droite. Par contre, lorsqu'elle rencontre de la matière, la lumière interagit avec celle-ci et sa propagation peut s'en trouver modifiée. On peut distinguer deux cas d'interactions lumière-matière. Lorsque la lumière rencontre une surface, elle peut être réfléchie par la surface et/ou transmise de l'autre coté de la surface. Ces deux phénomènes dépendent de l'angle d'incidence de la lumière, de sa longueur d'onde et des caractéristiques optiques de la surface. Lorsque la lumière traverse un volume contenant de la matière, elle peut être partiellement ou totalement absorbée. De plus, dans le cas d'un volume hétérogène de matière, composé de petites particules, la lumière peut être diffusée par ces particules, c'est à dire dispersée dans toutes les directions de l'espace.

1.2.1 Surfaces

Une surface est définie comme une fine couche de matière qui absorbe la lumière, puis la réémet totalement ou partiellement de chaque coté de la couche selon deux fonctions de distribution.

Nous pouvons diviser les surfaces en deux classes distinctes :

- les surfaces parfaites. Elles réfléchissent la lumière selon un modèle physique simple. Cette classe comprend les surfaces parfaitement lisses et les surface diffuses parfaites.
- les surfaces mixtes. Ces surfaces sont géométriquement complexes et/ou composées de divers matériaux de caractéristiques optiques variables. Les mécanismes de réflexion et de transmission de ces surfaces sont par conséquent très complexes.

1.2.1.1 Fonction de distribution de réflectance bi-directionnelle (FDRB) et fonction de distribution de transmittance bi-directionnelle (FDTB)

La fonction de distribution de réflectance bi-directionnelle, notée R, décrit la distribution de la luminance réfléchie par une surface en fonction de l'éclairement incident dans un angle solide dV_i.

Pour tout éclairement dE dans un angle solide incident dV_i, elle indique la proportion de luminance réfléchie dans chaque angle solide dV_r.

$$\begin{aligned} L(P, V_r) &= R(P, V_i, V_r)dE & (1.9) \\ &= R(P, V_i, V_r)L(P, V_i)\cos\theta_i dV_i & (1.10) \end{aligned}$$

La fonction de distribution de réflectance bi-directionnelle peut donc se définir comme le rapport de la luminance réfléchie dans un angle solide dV_r sur la densité du flux incident. Elle est exprimée en st^{-1}.

$$\begin{aligned} R(P, V_i, V_r) &= \frac{L(P, V_r)}{dE} & (1.11) \\ &= \frac{L(P, V_r)}{L(P, V_i)\cos\theta_i dV_i} & (1.12) \end{aligned}$$

La fonction de distribution de transmittance bi-directionnelle, notée T, est similaire : elle décrit la distribution de la luminance transmise par une surface en fonction de l'éclairement incident dans un angle solide dV_i.

Ces deux fonctions vérifient les deux lois suivantes de la thermodynamique :

- la loi de réciprocité d'Helmholtz : R est symétrique relativement à V_i et V_r et T est symétrique relativement à V_i et V_t.

$$R(P, V_i, V_r) = R(P, V_r, V_i) \tag{1.13}$$
$$T(P, V_i, V_t) = T(P, V_t, V_i) \tag{1.14}$$

- la loi de la conservation de l'énergie : quelle que soit la direction incidente, la somme du flux réfléchi et du flux transmis ne peut être supérieure au flux incident.

$$\int_{V_r \in \mathcal{V}} R(P, V_i, V_r) cos\theta_r dV_r + \int_{V_t \in \mathcal{V}} T(P, V_i, V_t) cos\theta_t dV_t \leq 1 \tag{1.15}$$

  Cette somme est inférieure à 1 lorsque la surface absorbe une partie de la lumière.

1.2.1.2 Surfaces parfaites

Surfaces spéculaires

L'interaction de la lumière avec une surface parfaitement lisse est un phénomène décrit depuis fort longtemps. Dès l'antiquité, les grecs connaissaient les lois de la réflexion sur un miroir. Plus tard, Snell et Descartes ont parallèlement établi les lois géométriques de la réflexion et de la transmission de la lumière sur une surface lisse. Finalement, Fresnel a proposé un modèle complet de réflexion pour l'interface entre deux milieux diélectriques. Les travaux de Maxwell ont généralisé ce modèle aux milieux conducteurs.

Lois de Descartes Fondées sur l'optique géométrique, elles définissent géométriquement l'interaction lumière-surface (Figure 1.3) :

- Un rayon lumineux incident I, rencontrant une surface se divise en deux rayons : un rayon réfléchi R et un rayon transmis T.
- Les rayons R et T sont dans le plan défini par le rayon I et la normale N de la surface.
- L'angle θ_r entre le rayon R et la normale N est égal à l'angle θ_i entre le rayon I et la normale N.
- L'angle θ_t entre le rayon T et l'inverse de la normale N vérifie la loi

$$sin\theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin\theta_i \tag{1.16}$$

  où n_i et n_t sont les indices de réfraction du milieu d'incidence et du milieu de transmission. L'indice de réfraction est le rapport de la vitesse de la lumière dans ce milieu et de sa vitesse dans le vide.

  L'équation 1.16 n'est pas toujours satisfiable : il existe des situations où $\frac{n_i}{n_t} \sin\theta_i > 1$. Dans ce cas, il n'y a pas de transmission et toute la lumière est réfléchie.

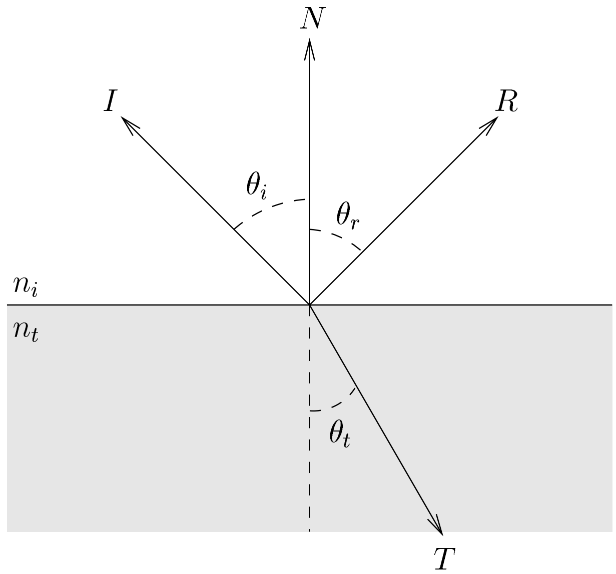


Figure 1.3 : Géométrie de l'interaction lumière-surface lisse

Equations de Fresnel Les lois de Descartes ne donnent que des informations de nature géométrique. Pour modéliser complètement l'interaction lumière-surface, il nous faut aussi décrire le comportement énergétique de la lumière.

Le facteur de Fresnel F permet de calculer les proportions de lumière réfléchie et transmise par la surface définie par deux diélectriques. Ce facteur a été étendu plus tard aux matériaux conducteurs. Un conducteur est décrit par son indice de réfraction n et son coefficient d'extinction k. Le coefficient d'extinction k mesure l'atténuation de la lumière traversant un conducteur sur une longueur l. Le degré de transparence est déterminé par la *Loi de Lambert* qui dépend de la longueur d'onde λ :

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) \exp^{-4\pi kl/\lambda} \tag{1.17}$$

Les conducteurs ont généralement un coefficient d'extinction élevé, d'où leur opacité, alors que les diélectriques ont un coefficient d'extinction nul. Les semi-conducteurs ont un petit coefficient d'extinction.

Le facteur de Fresnel F est une fonction de plusieurs variables :

- l'indice de réfraction relatif des deux milieux pour la longueur d'onde considérée : $n = \frac{n_t}{n_i}$,
- le coefficient d'extinction k_t du milieu de transmission pour la longueur d'onde considérée,
- l'angle d'incidence θ_i,
- la polarisation de la lumière — dont nous ne tenons pas compte de par nos hypothèses —.

Pour une lumière non polarisée, F est donnée par l'expression suivante où $cos\theta_i = u$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\frac{(a-u)^2+b^2}{(a+u)^2+b^2}\left[\frac{(a+u-1/u)^2+b^2}{(a-u+1/u)^2+b^2}+1\right] \qquad (1.18) \\ a^2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(n_\lambda^2-k_\lambda^2+u^2-1)^2+4n_\lambda^2k_\lambda^2}+n_\lambda^2-k_\lambda^2+u^2-1\right) \\ b^2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(n_\lambda^2-k_\lambda^2+u^2-1)^2+4n_\lambda^2k_\lambda^2}-n_\lambda^2+k_\lambda^2-u^2+1\right) \end{aligned}$$

Le facteur de Fresnel F définit pour un flux incident P_i le flux réfléchi P_r et le flux transmis P_t :

$$P_r = FP_i \ et \ P_t = (1-F)P_i \qquad (1.19)$$

Les surfaces parfaitement lisses ont une particularité : dès que l'équation 1.16 ne peut être vérifiée, il n'y a pas de transmission et F vaut 1.

Surface diffuse

Une surface diffuse parfaite réfléchit la lumière uniformément dans toutes les directions, et ce, quelle que soit la direction incidente. La conséquence directe de ceci est une FDRB uniforme :

$$R(P, V_i, V_o) = R \qquad \forall V_i \in \mathcal{V} \qquad \forall V_o \in \mathcal{V} \qquad (1.20)$$

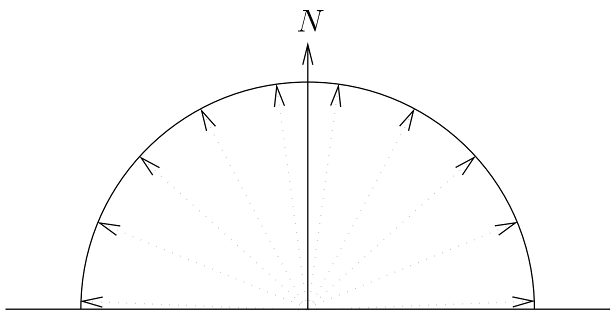


Figure 1.4 : FDRB uniforme pour une surface diffuse

La direction de réflexion n'influant plus sur la FDRB, la réflectance hémisphérique R_h – appelée dans ce cas réflectance diffuse R_d – est suffisante pour caractériser la réflectance de la surface.

$$\begin{aligned} R_d &= R\int_{V_i\in\mathcal{V}}\cos\theta_i dV_i \qquad (1.21) \\ &= R\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta_i\sin\theta_i d\theta_i d\phi_i \qquad (1.22) \\ &= \pi R \qquad (1.23) \end{aligned}$$

1.2.1.3 Surfaces mixtes

Les deux modèles décrits précédemment décrivent des surfaces parfaites qui sont rarement rencontrées. La majorité des surfaces présentent une réflexion de la lumière mixte : ni complètement diffuse, ni complètement spéculaire. Plusieurs modèles ont été proposés pour calculer la FDRB de ces surfaces.

Micro-facettes

Le premier modèle théorique de réflectance pour l'infographie a été présenté par Cook et Torrance [CT81]. Ce modèle est issu du modèle physique développé dans [TS66] [TS67].

Dans ce modèle, la surface est composée d'un ensemble de facettes infiniment petites et parfaitement spéculaires, appelées micro-facettes. L'orientation des micro-facettes est donnée par une fonction de distribution de leur normale.

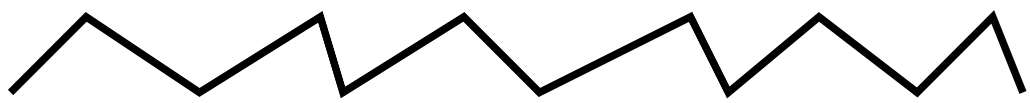


Figure 1.5 : Surface composée de micro-facettes

Pour une lumière incidente dans une direction V_i, la quantité de lumière réfléchie dans une direction V_r dépend du nombre de micro-facettes correctement orientées, c'est à dire dont la normale est le vecteur bissecteur H de V_i et V_r.

L'expression de la fonction de réflectance bi-directionnelle est :

$$R(P, V_i, V_r) = \frac{F}{4\pi(N.V_i)(N.V_r)} D(H) G(V_i, V_r) \tag{1.24}$$

où F est le facteur de Fresnel, N la normale de la surface, D la fonction de distribution des micro-facettes qui définit la fraction des micro-facettes dont la normale est H et G un facteur d'atténuation géométrique de la surface.

Ce modèle a été plus tard étendu dans [HTSG91] pour prendre en compte localement tous les phénomènes physiques (polarisation, diffraction, interférences et conductivité) et dans [Kaj85][CMS87][PF90][War92][Sch94] pour modéliser les réflexions anisotropes.

Géométrie complexe

A une échelle plus grande que celle des micro-facettes, la surface peut présenter une géométrie complexe, régulière ou irrégulière. On peut prendre comme exemple les tissus, dont le maillage forme une structure géométrique régulière, ou les métaux grossièrement brossés.

La fonction de réflectance bi-directionnelle d'une telle surface dépend fortement de cette géométrie complexe. Malheureusement, il n'est pas possible d'exprimer analytiquement cette fonction. Elle doit donc être calculée par des méthodes numériques. Pour des raisons d'efficacité, ces calculs sont généralement effectués une seule fois pour un échantillon de n directions incidentes et p directions réfléchies. Pour chaque direction incidente, les valeurs de la FDRB pour les directions réfléchies sont stockées dans une structure de donnée adéquate (discrétisation des directions ou harmoniques sphériques).

Dans [CMS87], la FDRB est calculée par une simulation de Monte Carlo (les méthodes de Monte Carlo seront décrites en détail dans la dernière section de ce chapitre). Cette simulation consiste à bombarder un échantillon de surface avec des photons incidents depuis une direction donnée V. Les photons sont réfléchis par la surface en fonction de sa géométrie. La distribution des directions des photons réfléchis définit la FDRB pour cet angle d'incidence. Elle est stockée dans une table discrétisant les directions. Ce processus est répété pour chacune des directions incidentes discrétisées.

Dans [WAT92], ce travail a été étendu sur plusieurs aspects. Cette méthode traite des géométries plus complexes et d'échelle variable. Le calcul de la FDRB combine à la fois une simulation et une intégration de Monte Carlo. Le stockage de la FDRB fait appel aux harmoniques sphériques.

Surfaces composites

Une surface composite est constituée d'une ou plusieurs couches de matériaux hétérogènes. Chaque couche est composée d'un substrat dans lequel des particules sont en suspension. La surface de chaque couche est composée de micro-facettes.

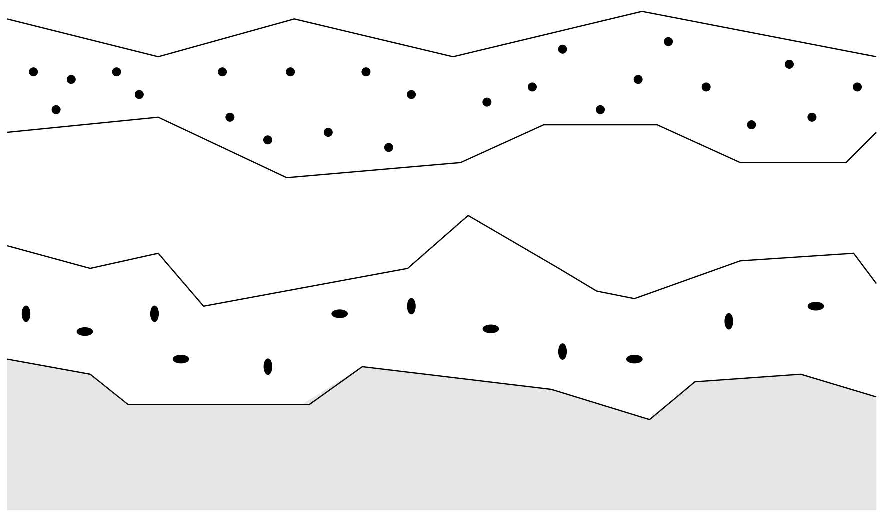


Figure 1.6 : Surface composite

La réflexion de la lumière sur une telle surface est très complexe. Lorsqu'un photon rencontre la surface d'une couche, il peut être réfléchi (Figure 1.7(a)) ou transmis à l'intérieur de la couche (Figure 1.7(b)(c)(d)). Une fois à l'intérieur de cette couche, il peut progresser en ligne droite jusqu'à la couche suivante (Figure 1.7(b)), être absorbé (Figure 1.7(c)) ou diffusé (Figure 1.7(d)) par une particule en suspension dans le substrat.

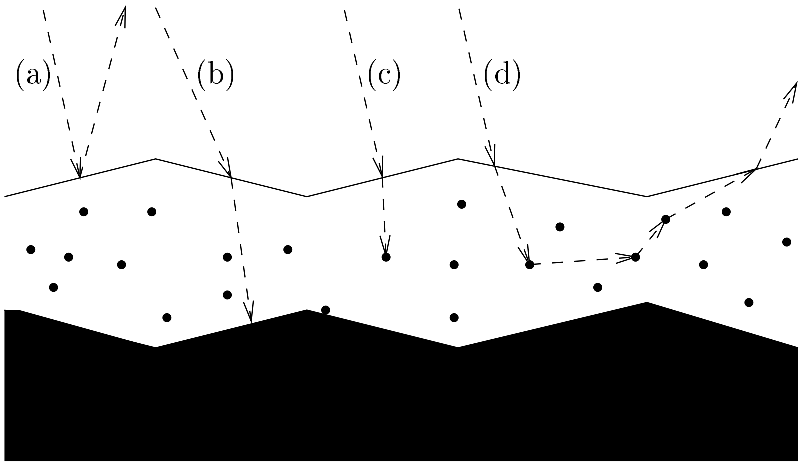


Figure 1.7 : Réflexion de la lumière

Pour calculer la FDRB, il faut là aussi avoir recours à des méthodes numériques.

Dans [HK93], les auteurs proposent d'évaluer la FDRB par des méthodes de Monte Carlo. Ils proposent deux approches :

- une simulation de Monte Carlo pour effectuer un calcul préalable de la FDRB pour un ensemble de directions échantillonnées.
- une intégration de Monte Carlo lorsqu'ils désirent évaluer la FDRB pour une direction incidente et une direction réfléchie données. Cette solution est plus lente, mais évite les problèmes liés à un stockage de la FDRB (interpolation, aliasing, coût mémoire).

L'étude des surfaces composites nécessite donc, non seulement la modélisation de la réflexion et de la réfraction, mais aussi celle des mécanismes d'absorption et de diffusion de la lumière par de petites particules à l'intérieur de l'objet. Nous ne devons plus considérer l'objet solide seulement comme une surface, mais comme un volume. Ces mécanismes d'absorption et de diffusion dans ces volumes sont décris dans la section suivante.

1.2.2 Volumes

Le volume dans lequel se déplace la lumière constitue son milieu. On considère habituellement que la lumière s'y propage en ligne droite, sans variation d'intensité ou de direction.

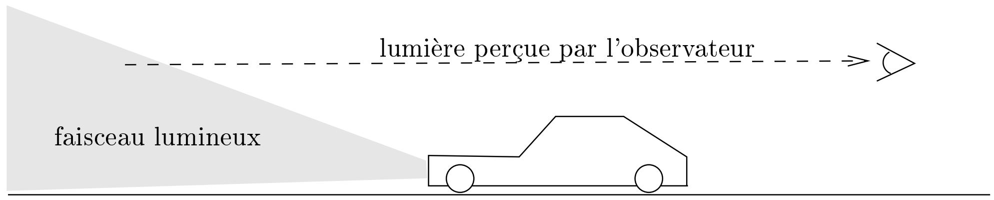


Figure 1.8 : Illumination du brouillard par une voiture

Elle n'interagit qu'avec la surface des objets. Ces deux hypothèses sont applicables seulement dans le vide ou dans un milieu très transparent, comme une atmosphère très pure sur une petite échelle. Cependant, dès que le milieu contient des particules interagissant de manière significative avec la lumière, les deux hypothèses précédantes ne sont plus valables et le milieu devient participant.

Il existe deux types de milieux :

1. Le diamètre des particules est grand comparé à la longueur d'onde. Les phénomènes physiques entrant alors en jeu sont la réflexion, la réfraction, la diffraction et l'interférence. Ils donnent naissance, sous certaines conditions, aux arcs en ciel : la réflexion et la réfraction produisent les arcs primaires et secondaires, tandis que la diffraction et l'interférence génèrent les arcs surnuméraires et la bande sombre d'Alexandre Les gouttes de pluie ou de bruine appartiennent à cette catégorie.

2. Le diamètre des particules est d'au plus quelques microns. Les phénomènes à considérer sont l'absorption et la diffusion. Les brouillards et les fumées sont des exemples de tels milieux.

Par la suite, notre étude des milieux va porter uniquement sur les milieux participants du second type.

Lorsqu'un faisceau lumineux continu rencontre une particule, deux phénomènes se produisent. Une partie de l'énergie du rayon lumineux est absorbée par la particule et transformée en énergie calorifique (changement de longueur d'onde) ou chimique. Le reste de l'énergie est diffusé dans toutes les directions de l'espace selon une fonction de distribution appelée fonction de phase de la particule. Ce phénomène de diffusion est facilement illustré par un exemple : lorsque les phares d'une voiture illuminent un brouillard, la lumière émise par les phares est diffusée par les gouttelettes d'eau dans toutes les directions de l'espace. Un observateur placé derrière le véhicule perçoit le faisceau de lumière (Figure 1.8). La couleur bleue du ciel s'explique de la même façon : les molécules de gaz de l'atmosphère diffusent les longueurs d'ondes courtes (le bleu) de la lumière du soleil dans toutes les directions, et donc en partie dans notre direction.

Comme pour les surfaces, c'est l'interaction du milieu avec la lumière qui le rend visible. De plus, certains milieux participants sont eux-même émetteurs. C'est le cas des flammes.

1.2.2.1 Nature des milieux participants

Un milieu participant est constitué :

- d'un substrat dont l'influence sur la lumière est considérée comme négligeable par rapport à l'influence totale du milieu,
- de particules en suspension dans ce substrat qui vont interagir avec la lumière.

Un milieu participant est donc un volume hétérogène de matière. L'intensité et la direction de la lumière traversant un tel milieu sont modifiées par son interaction avec les particules. De plus, les particules peuvent elles-même émettre de la lumière.

La nature du substrat et des particules est très variable. Le substrat peut être gazeux, liquide, solide ou même vide. Les particules peuvent être des molécules de gaz, des gouttelettes de liquide ou des agrégats solides. De plus, un même matériau peut constituer le substrat du milieu dans un cas ou les particules du milieu dans un autre.

Voici quelques exemples de milieux participants illustrant cette diversité :

- Une atmosphère très pure ne contient que des molécules de gaz. Le substrat est inexistant : substrat vide, particules gazeuses.
- Les nuages sont composés de gouttelettes d'eau ou de cristaux de glace en suspension dans l'air : substrat gazeux, particules liquides ou solides.
- Une eau trouble contient de nombreuses particules microscopiques (plancton, limons) qui agissent sur la lumière : substrat liquide, particules solides.
- Une peinture vinyle est formée d'un substrat transparent contenant des pigments de couleur : substrat solide, particules solides.

1.2.2.2 Interaction Lumière - Particules

Lorsqu'une particule intercepte un rayon lumineux, elle absorbe son énergie et en réémet tout ou partie selon une fonction de distribution de la lumière : la fonction de phase. Ces mécanismes d'absorption et de diffusion sont décrits par les théories de Mie et de Rayleigh. Ces deux théories sont une application des équations de Maxwell à des particules sphériques ou ellipsoïdales de petites tailles. La théorie de Rayleigh s'applique à des particules d'un diamètre inférieur à 0.05 fois la longueur d'onde. Lorsque le diamètre des particules est supérieur à ce seuil, et ce jusqu'à plusieurs fois la longueur d'onde, le phénomène de diffusion est beaucoup plus complexe et il faut utiliser la théorie de Mie.

La diffusion est caractérisée qualitativement par la fonction de phase de la particule. Quantitativement, elle l'est par la section efficace d'absorption et la section efficace de diffusion de la particule. Dans les paragraphes suivants, nous allons présenter séparément l'aspect qualitatif et l'aspect quantitatif de la diffusion.

Fonction de phase

La fonction de phase $\varphi(V, V')$ est à une particule ce que la FDRB est à une surface. Elle décrit la distribution de la luminance diffusée en fonction de l'éclairement incident. Comme la FDRB, elle vérifie les deux lois classiques de la Thermodynamique. Premièrement, φ suit la règle de la réciprocité d'Helmholtz : φ est symétrique relativement à V et V'.

$$\forall\ V \in \mathcal{V} \quad \forall\ V' \in \mathcal{V} \quad \varphi(V, V') = \varphi(V', V) \tag{1.25}$$

Deuxièmement, φ vérifie la loi de la conservation de l'énergie :

$$\forall\ V \in \mathcal{V} \quad \frac{1}{4\pi} \int_{V' \in \mathcal{V}} \varphi(V, V')\ dV' \leq 1 \tag{1.26}$$

De plus, comme les milieux participants sont généralement isotropes, φ est habituellement symétrique autour de la direction incidente de la lumière et $\varphi(V, V')$ ne dépend que de l'angle θ entre V et V'. L'équation précédente peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\theta, \phi)\ \sin\theta\ d\theta\ d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \varphi(\theta)\ \sin\theta\ d\theta \leq 1 \tag{1.27}$$

Finalement, en posant $t = \cos\theta$, on obtient une condition de normalisation :

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)\ dt \leq 2 \tag{1.28}$$

L'expression de φ dépend du régime de diffusion considéré : diffusion de Rayleigh ou diffusion de Mie.

Pour les particules de petite taille, la théorie de Rayleigh propose la fonction de phase suivante :

$$\varphi(t) = \frac{3}{4}\ (1 + t^2) \tag{1.29}$$

La figure 1.9 montre que la lumière est diffusée de manière égale vers l'avant et vers l'arrière.

Pour les particules plus grosses, la fonction de phase est donnée par la théorie de Mie. La forme de cette fonction varie en fonction de la taille de la particule : plus la particule est grosse, plus la diffusion a lieu vers l'avant et plus les détails de diffusion sont importants. La forme analytique de cette fonction étant très complexe, elle est peu utilisée. Plusieurs approximations sont proposées dans la littérature.

- Une approximation, simple dans son expression, mais coûteuse à calculer, est proposée dans [NMN87]. Elle est de la forme :

$$\varphi(t) = C(1 + m * (\frac{1+t}{2})^n) \tag{1.30}$$

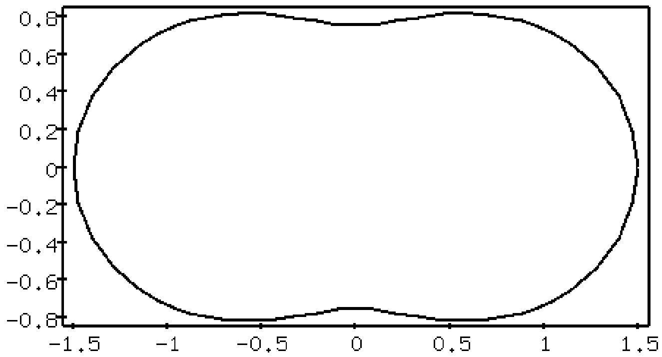


Figure 1.9 : Fonction de phase de Rayleigh

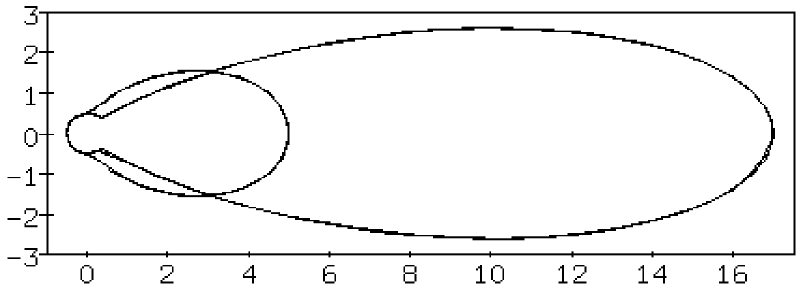


Figure 1.10 : Approximations simples de la fonction de Mie

Pour des particules de diamètre proche de la longueur d'onde, $m = 9$ et $n = 8$. Pour des particules de diamètre un peu plus grand que la longueur d'onde, $m = 33$ et $n = 32$. Connaissant n et m, l'équation 1.26 permet de déterminer C par normalisation.

- La fonction de Henyey-Greenstein [Bli82] [HG41], bien connue des physiciens, est une approximation qui donne des résultats satisfaisants :

$$\varphi_k(t) = \frac{1-k^2}{(1-2kt+k^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{avec} \quad k \in \,]-1,1[\qquad (1.31)$$

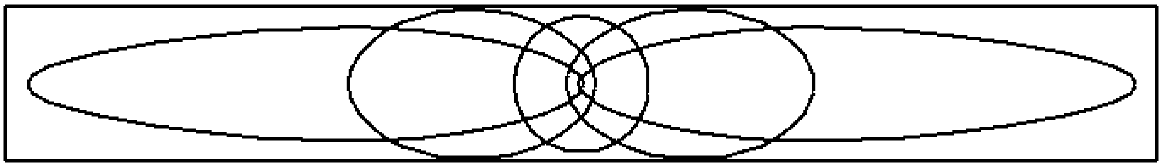


Figure 1.11 : Fonction de phase d'Henyey-Greenstein pour $k = -0.9, -0.6, 0, 0.6, 0.9$

Sa principale caractéristique est qu'elle fournit un continuum entre la diffusion avant ($k > 0$), la diffusion isotrope ($k = 0$) et la diffusion arrière ($k < 0$). De plus, en prenant une somme normalisée de plusieurs $\varphi_k(t)$ avec différentes valeurs pour k, on peut obtenir des fonctions très proches des fonctions théoriques :

$$\varphi_k(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i \; \varphi_{k_i}(t) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \qquad (1.32)$$

- Cornette [NSTN93][CS92] a récemment proposé une amélioration de cette fonction, pour obtenir une approximation plus proche de la physique :

$$\varphi_k(t) = \frac{3(1-k^2)}{2(2+k^2)} \frac{1+t^2}{(1-2kt+k^2)^{3/2}} \tag{1.33}$$

avec

$$k = \frac{5}{9}u - (\frac{4}{3} - \frac{25}{81}u^2)x^{-1/3} + x^{1/3} \quad ,$$
$$x = \frac{5}{9}u + \frac{125}{729}u^3 + (\frac{64}{27} - \frac{325}{243}u^2 + \frac{1250}{2187}u^4)^{1/2} \quad ,$$

u dépend de la taille des particules et de la longueur d'onde.

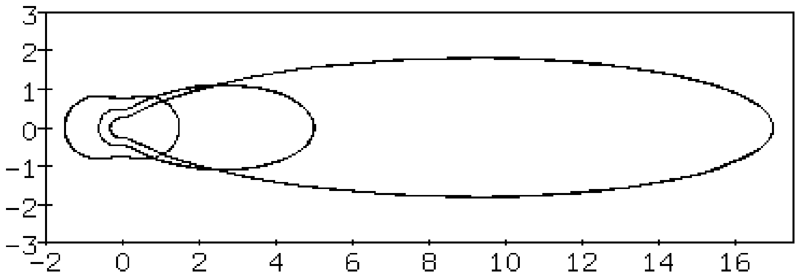


Figure 1.12 : Fonction de phase de Cornette pour $k = 0$ (*Rayleigh*), $0.53, 0.7527$

Nous proposons dans [BLS93] une nouvelle approximation :

$$\varphi_k(t) = \frac{1-k^2}{(1-kt)^2} \quad \text{avec} \quad k \in \,]-1,1[\tag{1.34}$$

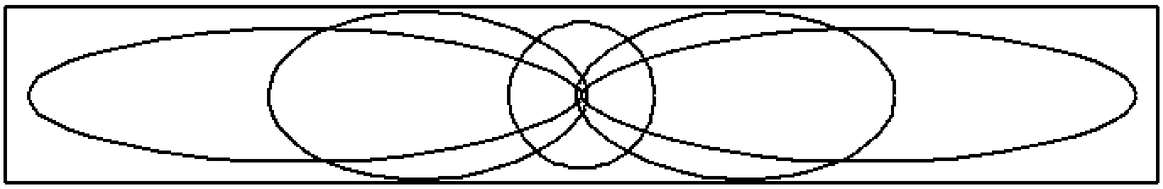
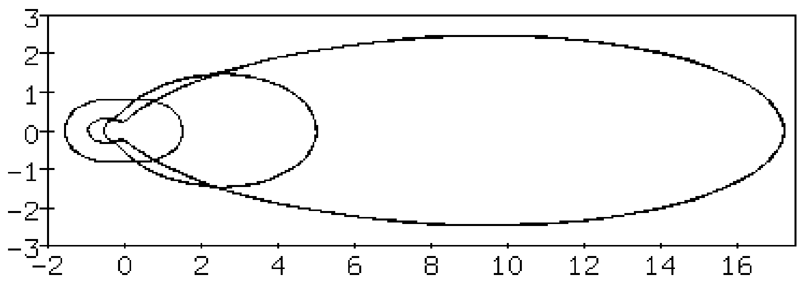


Figure 1.13 : Fonction de phase de Schlick pour $k = -0.95, -0.8, 0, 0.8, 0.95$

Cette nouvelle formulation présente les mêmes caractéristiques que la fonction de Henyey-Greenstein. Premièrement, elle assure un continuum entre la diffusion arrière ($k < 0$), la diffusion isotrope ($k = 0$) et la diffusion avant ($k > 0$). Deuxièmement, des fonctions proches des fonctions théoriques peuvent être obtenues en utilisant une somme normalisée de plusieurs $\varphi_k(t)$. Pour approcher la fonction de la diffusion de Rayleigh ou l'approximation proposée dans [NMN87], deux termes suffisent :

$$\varphi_{r,k,k'}(t) = r\ \varphi_k(t) \ + \ (1-r)\ \varphi_{k'}(t) \quad \text{avec} \quad r \in [0,1] \;\; k \in \,]-1,1[\;\; k' \in \,]-1,1[\tag{1.35}$$



Rayleigh	$r = 0.50$	$k = -0.46$	$k' = 0.46$
Mie	$r = 0.12$	$k = -0.50$	$k' = 0.70$
	$r = 0.19$	$k = -0.65$	$k' = 0.91$

Figure 1.14 : Composition de fonctions de phase de Schlick

Les avantages de cette fonction viennent de sa simplicité :

- elle est beaucoup plus rapide à calculer que la fonction de Henyey-Greenstein (1 soustraction, 2 multiplications et 2 division dans une implémentation optimisée).
- l'inverse de sa primitive est simple. Comme nous le verrons par la suite, cette propriété est primordiale pour un échantillonnage rapide et optimal de φ_k.
- elle est intuitive : la proportion de diffusion vers l'avant est donnée par $\frac{1+k}{2}$. Nous pouvons exprimer plus naturellement la fonction de phase en fonction de cette proportion de diffusion vers l'avant : nous réécrivons $\varphi_k(t)$ en $\varphi_K(t)$ avec $K = \frac{1+k}{2}$.

$$\varphi_K(t) = \frac{1-(2K-1)^2}{(1-(2K-1)t)^2} \quad \text{avec} \quad K \in]0,1[\tag{1.36}$$

Sections efficaces d'absorption et de diffusion

Les sections efficaces d'absorption α et de diffusion σ d'une particule décrivent respectivement la quantité de lumière absorbée et diffusée par une particule par unité d'éclairement incident. Elles sont exprimées en cm^{-2}.

A partir de ces deux sections, on peut calculer l'albédo γ de la particule, c'est à dire sa capacité à réémettre de la lumière diffuse.

$$\gamma = \frac{\sigma}{\alpha + \sigma} \tag{1.37}$$

En régime de diffusion de Rayleigh, la section efficace d'absorption des particules est très petite pour les longueurs d'ondes visibles et peut-être considérée comme négligeable. La section efficace de diffusion est, quant à elle, très sensible à la longueur d'onde : elle est inversement proportionnelle à la puissance 4 de la longueur d'onde :

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda &= \frac{C_0}{\lambda^4} \\ C_0 &= \frac{8\pi^3}{3N^2}(\mu^2-1)^2 \end{aligned} \tag{1.38}$$

où μ est l'indice de réfraction mesuré à $0°C$ et à la pression $P = 101325hPa$, ce qui correspond pour N à $2.68710^{19} particules/cm^3$ (nombre de Lodschmidt).

Cette diffusion privilégie donc les longueurs d'onde courtes. Le bleu du ciel est un cas typique où ce type de diffusion apparaît : les molécules d'oxygène et d'azote de l'atmosphère diffusent le bleu ($400nm$) seize fois plus que le rouge ($800nm$).

En régime de diffusion de Mie, les sections efficaces d'absorption et de diffusion sont indépendantes de la longueur d'onde : la lumière diffusée présente une couleur semblable à celle de lumière incidente. Il en résulte que les nuages apparaissent blancs. Ces sections sont, de plus, bien plus importantes que les sections efficaces en régime de diffusion de Rayleigh.

On peut facilement constater les différences entre les deux régimes de diffusion en observant un fumeur. La fumée de cigarette est bleutée, car constituée de toutes petites particules de goudron. Lorsque cette fumée pénètre dans les poumons, elle se charge de vapeur d'eau et contient donc des particules de plus gros diamètre : la fumée expirée est blanche et beaucoup plus visible (section efficace de diffusion plus importante).

Caractérisation du milieu participant

De manière similaire aux particules le constituant, un milieu participant est caractérisé par deux coefficients : le coefficient d'absorption k_a et le coefficient de diffusion k_d. Le coefficient d'absorption k_a mesure la fraction par laquelle la luminance est réduite par absorption par unité de longueur (cm^{-1}). De même, le coefficient de diffusion k_d mesure la fraction par laquelle la luminance est réduite par diffusion par unité de longueur (cm^{-1}). C'est à partir de ces deux coefficients que l'on définit le coefficient d'extinction $k_t = k_a + k_d$ qui mesure l'atténuation globale de la luminance par cm^{-1}.

La relation entre ces coefficients et les sections efficaces des particules du milieu est simple :

$$k_a = \rho\alpha \quad et \quad k_d = \rho\sigma \tag{1.39}$$

où ρ est la concentration du milieu exprimée en *nombre de particules.*cm^{-3}.

Lorsque le milieu participant présente une concentration hétérogène, il est coûteux et peu pratique de manipuler des concentrations exprimées en *nombre de particules.*cm^{-3}.

Il est plus simple de ne plus faire référence aux particules. Nous exprimons les grandeurs caractérisant le milieu par rapport aux valeurs maximales qu'elles peuvent prendre pour le milieu considéré :

- la densité ρ_r, ratio de la concentration en un point P sur la concentration maximale du milieu. Cette densité est sans dimension.

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho^{max}} \tag{1.40}$$

- les coefficients d'absorption et de diffusion maximum, produits des sections efficaces par la concentration maximale du milieu. Pour rester homogène avec les mesures de distances pour les surfaces, ces coefficients sont exprimés en m^{-1}.

$$k_a^{max} = 100\alpha\rho^{max} \quad et \quad k_s^{max} = 100\sigma\rho^{max} \tag{1.41}$$

Les coefficients sont maintenant calculés en m^{-1} par l'équation suivante :

$$k_a = \rho_r k_a^{max} \quad et \quad k_d = \rho_r k_s^{max} \tag{1.42}$$

1.2.2.3 Interaction Lumière - Volume

Lorsqu'un rayon lumineux traverse un milieu participant, sa luminance peut être modifiée :

- elle peut être diminuée par absorption du milieu ou par diffusion dans d'autres directions (diffusion sortante).
- elle peut être augmentée par émission propre du milieu ou par diffusion dans sa direction d'une partie de la luminance des rayons lumineux de directions différentes (diffusion entrante).

Les points d'interaction de la lumière avec les particules peuvent se situer n'importe où dans le milieu. Il faut donc avoir une expression de la luminance en tout point du milieu. Cette expression est donnée par l'équation générale de transfert, qui exprime la variation de luminance $dL(P,V)$ d'un rayon lumineux de direction V et de luminance $L(V)$ le long d'un chemin dP [SP94] :

$$\frac{dL(P,V)}{dP} = -k_t L(P,V) + k_a L_e(P,V) + k_d \int_{\mathcal{V}} L_i(P,V')\varphi(V,V')dV' \tag{1.43}$$

où $L_e(P,V)$ est la luminance propre du milieu émise dans la direction V, $L_i(P,V')$ est la luminance incidente depuis la direction V' et $\mathcal{V}$ l'ensemble des directions de la luminance incidente. Les différents termes de cette équation représentent les phénomènes physiques suivants :

- $-k_t L$ représente l'atténuation due à l'absorption ou à la diffusion sortante.
- $k_a L_e$ représente l'augmentation de luminance due à l'émission propre du milieu.
- le terme intégral représente l'augmentation de luminance due aux diffusions entrantes, *i.e.* la contribution de la lumière venant de toutes les directions est diffusée dans la direction étudiée.

Atténuation et transmittance

La transmittance, ou facteur de transmission, exprime la fraction de lumière parcourant un chemin donné dans un milieu participant sans subir d'atténuation ou de diffusion. Elle est calculée à partir du premier terme de l'équation générale de transfert :

$$\frac{dL(P,V)}{dP} = -k_t L(P,V) \tag{1.44}$$

Cette équation est appelée loi de Beer-Lambert. En l'intégrant, on peut obtenir la loi de Bouguer qui exprime la luminance $L(P)$ d'un rayon lumineux après un trajet du point P_0 au P dans le milieu :

$$L(P) = L(P_0)e^{-\int_{P_0}^{P} k_t(P')dP'} \tag{1.45}$$

où $L(P_0)$ est la luminance initiale du rayon au point P_0. La *profondeur optique* du milieu sur le trajet optique entre deux points P et P' est

$$\tau(P,P') = \int_{P}^{P'} k_t(P'')dP'' \tag{1.46}$$

et la *transmittance* sur ce chemin optique est donc donnée par

$$T(P,P') = e^{-\tau(P,P')} \tag{1.47}$$

1.3 Les équations de rendu généralisées aux milieux participants

En synthèse d'image, il existe de nombreuses méthodes pour générer une image bidimensionnelle en utilisant une description géométrique et optique d'une scène tridimensionnelle. Elles peuvent être dépendantes ou indépendantes de la position de l'observateur, empiriques ou basées sur un modèle issu de la physique, complètes ou incomplètes. Ces méthodes, aussi différentes soient-elles les unes des autres, sont en fait des techniques d'intégration numérique spécialisées dans la résolution de deux équations : l'équation de scène et l'équation d'image. L'équation de scène définit la luminance émise par chaque point P et chaque direction V de la scène. C'est une équation intégrale récursive (équation de Fredholm du premier ordre) qui décrit le transport de la lumière dans la scène. L'équation d'image simule un appareil photographique virtuel avec le rayon et l'ouverture de la lentille et le temps d'exposition pour calculer l'illumination d'une zone rectangulaire de la pellicule correspondant à un pixel de l'écran.

La formulation de ces équations est guidée par notre approche des milieux participants. Nous considérons la diffusion dans le milieu non pas d'un point de vue macroscopique, en nous intéressant au volume comme le fait l'équation générale de transfert, mais d'un point de vue microscopique, en nous intéressant aux particules du milieu. Nous conservons, par contre, une approche macroscopique du phénomène d'absorption.

Ces équations sont une généralisation aux milieux participants des équations proposées dans [Sch92]. Elles sont monochromatiques et doivent donc théoriquement être évaluées

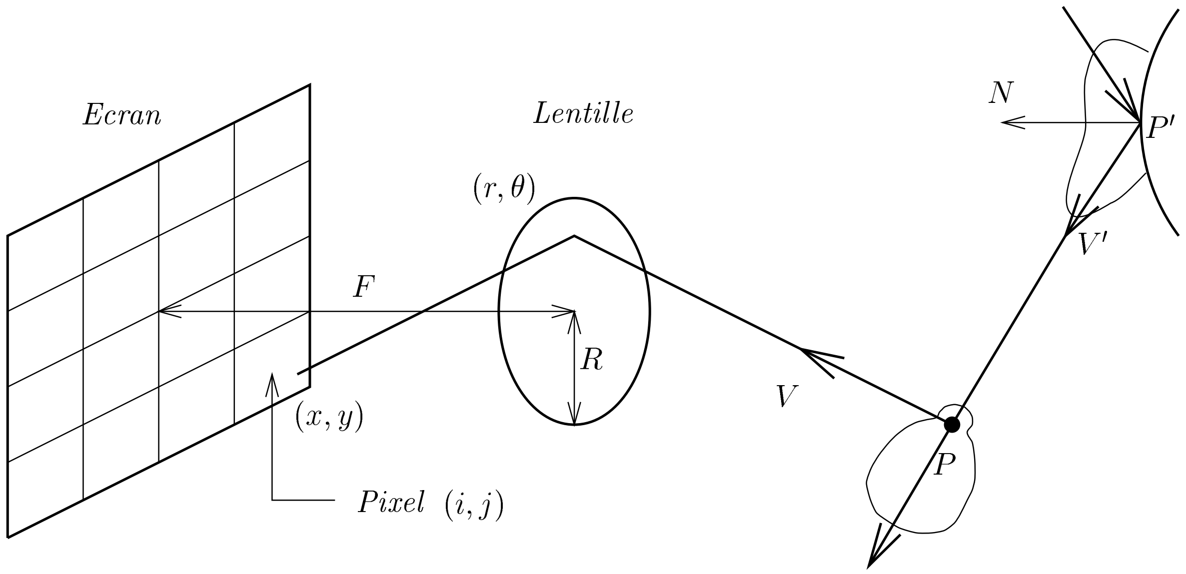


Figure 1.15 : Equation d'image et équation de scène

pour chaque longueur d'onde du spectre visible et en pratique pour un nombre limité d'échantillons du spectre [Mey88]. De plus, dans le cadre de nos hypothèses, elles ne prennent pas en compte les phénomènes de diffraction, interférence et polarisation.

$$I(i,j) = \frac{1}{T\pi R^2} \int_x \int_y \int_r \int_\theta \int_t K_{\mathrm{v}}(M,P)\, L(P,V)\, dx\, dy\, r\, dr\, d\theta\, dt \tag{1.48}$$

$$L(P,V) = L_{\mathrm{E}}(P,V) + \int_{V' \in \mathcal{V}} K_{\mathrm{s}}(P,V,V')\, K_{\mathrm{v}}(P,P')\, L(P',V')\, dV' \tag{1.49}$$

- P et P' : Deux points de diffusion consécutifs
- $I(i,j)$: Illumination du pixel (i,j)
- $L(P,V)$: Luminance quittant le point P dans la direction V
- $L_{\mathrm{E}}(P,V)$: Radiance propre émise par P dans la direction V
- $K_{\mathrm{s}}(P,V,V')$: facteur de diffusion surfacique au point P entre les directions V et V'
- $K_{\mathrm{v}}(P,P')$: facteur d'atténuation volumique entre les points P et P'
- $\mathcal{V}$: Ensemble des directions pour la lumière incidente (angle solide mesurant 4π)
- $T\pi R^2$: Facteur de normalisation (T est le temps d'exposition utilisé pour la prise de vue et R est le rayon de la lentille de l'appareil virtuel)
- dV' : Elément d'angle solide différentiel autour de la direction V'

L'interaction de la lumière avec une surface est peu différente de son interaction avec une particule : les deux sont décrites par une fonction de distribution de la luminance. Nous considérons par conséquent ces deux équations d'un point de vue un peu particulier : un point P où la lumière interagit avec la matière peut être indifféremment à la surface (réflexion et transmission) ou à l'intérieur d'un objet (absorption et diffusion par une particule du milieu absorbant). Avec l'interprétation précédente, le coefficient $K_s(P, V, V')$ — facteur de diffusion surfacique — exprime la distribution de la luminance dans l'espace en un point de diffusion P. C'est le ratio des luminances entre deux directions V et V' en P. Ce coefficient permet d'unifier le comportement de la lumière au contact des objets tant surfaciques que volumiques. On considère alors que la transmission et la réflexion en un point P ne sont que des cas particuliers de diffusion. Le coefficient $K_v(P, P')$ — facteur d'atténuation volumique — exprime l'atténuation de la lumière voyageant à travers un milieu participant. C'est le ratio des luminances entre deux points de diffusions P et P'. Comme le phénomène d'absorption est traité de façon macroscopique, K_v est donné par la loi de Bouguer restreinte à l'absorption :

$$K_v(P, P') = e^{-\int_P^{P'} k_a(P'')\ dP''} \tag{1.50}$$

A un point de diffusion P, l'expression de K_s varie selon que P appartient à un objet surfacique ou à un objet volumique :

- sur un objet surfacique,

$$K_s(P, V, V') = (N.V')\ R(P, V, V') \tag{1.51}$$

  où N est le vecteur normal à la surface au point P et $R(P, V, V')$ est la FDRB de la surface.

- dans un objet volumique,

$$K_s(P, V, V') = \frac{1}{4\pi}\ \varphi(V, V') \tag{1.52}$$

  où $\varphi(V, V')$ est la fonction de phase des particules du milieu.

Pour un objet surfacique, la position des points de diffusions peut être explicitement calculée en utilisant l'intersection du rayon avec la surface. Pour un objet volumique, ce calcul ne peut être fait, car nous connaissons seulement la densité volumique. Plus précisément, les objets volumiques sont définis comme un ensemble de particules dont la position dans l'espace est aléatoire, mais dont la distribution est connue. Par conséquent, la position des points de diffusion est abordée de manière stochastique, en utilisant un concept de *probabilité d'interception* d'un rayon par une particule. Cette probabilité d'interception est fonction de la densité, du coefficient de diffusion et de la distance parcourue par le rayon dans l'objet depuis le dernier point de diffusion. Dans la loi de Bouguer, le coefficient de diffusion exprime la fraction de l'énergie perdue par diffusion. Il est donc naturel de définir la probabilité d'interception $\omega_s(P, P')$ de la façon suivante :

$$\omega_s(P, P') = 1\ -\ e^{-\int_P^{P'} k_d(P'')\ dP''} \tag{1.53}$$

1.4 Techniques d'évaluation par des méthodes de Monte Carlo

Sous l'appellation générique de "méthodes de Monte Carlo" se cache un ensemble de méthodes dont le point commun est l'utilisation d'un processus stochastique pour obtenir une solution approchée d'un problème [Bus66][SG69][LJ84]. Ce type de méthodes est connu depuis longtemps, mais n'a pu être utilisé en pratique qu'avec l'apparition des ordinateurs. Ces méthodes sont d'une grande flexibilité : elles s'adaptent à de nombreux problèmes et sont appliquables à des environnements très complexes.

On peut distinguer deux catégories de méthodes :

- les intégrations de Monte Carlo, employant des techniques stochastiques d'approximation pour résoudre des problèmes mathématiques déterministes exprimés analytiquement. Les équations de scènes et d'images sont des problèmes de ce type.
- les simulations de Monte Carlo, décrivant l'évolution dans le temps d'un phénomène physique. Ce type de méthode, couramment utilisé en physique [SG69] et en chimie [Vig95][SL86], est bien adapté au modèle particulaire de lumière.

Les deux approches sont donc possibles pour résoudre le problème global d'illumination.

1.4.1 Variable aléatoire et techniques d'échantillonnage aléatoire

1.4.1.1 Variable aléatoire

Une variable aléatoire a est une quantité scalaire ou vectorielle, prenant aléatoirement sa valeur dans un espace de définition S. Le comportement aléatoire de la variable a est décrit par la distribution des valeurs qu'elle prend. Cette distribution est caractérisée par une fonction de densité de probabilité f de la variable. $f(u)du$ est la probabilité que la variable aléatoire a prenne sa valeur dans l'intervalle différentiel du autour de $u \in S$. La probabilité que a prenne sa valeur dans un sous-espace $S' \subset S$ est donc donnée par l'intégrale :

$$Prob(a \in S') = \int_{u \in S'} f(u)du \tag{1.54}$$

du est la mesure de l'espace de probabilité S. En synthèse d'image, cet espace est fréquemment une aire à la surface d'un objet ($du = dxdy$), un volume dans l'espace ($du = dxdydz$) ou une direction ($du = \sin\theta d\theta d\phi$).

Une variable aléatoire a toujours une probabilité positive ou nulle de prendre une valeur dans son espace de définition S :

$$f(u) \geq 0 \quad \forall u \in S \tag{1.55}$$

De plus, une variable aléatoire prend toujours une valeur dans son espace de définition S :

$$\int_{u \in S} f(u)du = 1 \tag{1.56}$$

Si l'espace de définition S est ordonné, la variable aléatoire a peut aussi être caractérisée par sa fonction de distribution cumulative F, primitive de f : $F(u) = \int_S f(u)du$. $F(u)$ est la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur inférieure à u. Elle vérifie les équations suivantes :

$$F(x) = \int_{min_S}^{x} f(u)du, \quad F(min_S) = 0, \quad F(max_S) = 1 \tag{1.57}$$

où min_S et max_S sont respectivement les valeurs minimales et maximales de l'espace ordonné S.

La valeur moyenne d'une variable aléatoire uni-dimensionnelle a est appelé l'espérance mathématique, notée $E(a)$:

$$E(a) = \int_{u \in S} uf(u)du \tag{1.58}$$

L'espérance mathématique de la somme de deux variables aléatoires est la somme des espérances mathématiques de ces variables.

La variance d'une variable aléatoire mono-dimensionnelle a, notée $var(a)$, est l'espérance mathématique du carré de la différence entre a et $E(a)$:

$$var(a) = E([a - E(a)]^2) = E(a^2) - [E(a)]^2 \tag{1.59}$$

La variance de la somme de deux variables aléatoires est la somme des variances des deux variables, si elle sont indépendantes. La variance donne une indication sur la déviation de la variable aléatoire par rapport à son espérance mathématique.

La séquence des valeurs a_i prises par une variable aléatoire a constitue un échantillon aléatoire. La moyenne des a_i est une estimation de l'espérance mathématique de a, d'autant plus précise que le nombre de valeurs considérées est important (loi des grands nombres) :

$$E(a) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \tag{1.60}$$

$$E(a) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \tag{1.61}$$

1.4.2 Techniques d'échantillonnage aléatoire

La simulation du comportement d'une variable aléatoire est appelée échantillonnage aléatoire. Elle doit générer des échantillons indépendants les uns des autres dont la distribution respecte la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire échantillonnée.

Les générateurs pseudo-aléatoires présents sur les ordinateurs fournissent un échantillonnage d'une variable aléatoire uniforme ξ dans un intervalle $[a, b]$. Uniforme signifie que la variable aléatoire ξ a la même probabilité de prendre n'importe quelle valeur dans $[a, b]$. La fonction de densité de probabilité d'une telle variable est $f(x) = \frac{1}{b-a},\ x \in [a, b]$. L'intervalle $[a, b]$ est généralement ramenée à un intervalle unitaire $[0, 1]$.

Les techniques d'échantillonnage aléatoire utilisent ces échantillons aléatoires uniformes sur un intervalle $[0, 1]$ pour générer des échantillons d'une variable aléatoire respectant sa fonction de densité de probabilité.

La transformation de variable aléatoire [LJ84] permet un échantillonnage d'une variable aléatoire a de fonction de densité de probabilité f à partir d'un échantillonnage d'une variable aléatoire ξ uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ en utilisant l'inverse F^{-1} de la fonction de répartition F associée à f.

$$a = F^{-1}(\xi) \tag{1.62}$$

En effet, a vérifie bien l'équation 1.54 :

$$\begin{aligned} Prob(\alpha < a < \beta) &= Prob(F(\alpha) < \xi < F(\beta)) && (1.63) \\ &= F(\beta) - F(\alpha) = \int_{alpha}^{\beta} f(u)du && (1.64) \end{aligned}$$

Un échantillon a_i de a s'obtient en appliquant F^{-1} à un échantillon ξ_i de ξ.

Bien sûr, cette technique ne peut être utilisée que si la fonction de densité de probabilité est intégrable et inversible. Dans le cas contraire, il faut alors se tourner vers une autre technique, l'échantillonnage par rejet.

Cette technique s'applique à n'importe quelle fonction de densité de probabilité f bornée, mais ne doit être utilisée qu'en dernier ressort, car très coûteuse en calcul. Pour échantillonner f bornée sur $[a, b]$, on génère une paire de nombres aléatoires uniformes (ξ_1, ξ_2) dans $[0, 1]^2$. Si $[\xi_2. \sup f(x)] < f(a + \xi_1(b - a))$ alors $a + \xi_1(b - a)$ est accepté comme échantillon de $f(x)$, sinon la paire est rejetée et le processus est répété. Cette méthode est peu efficace, car l'obtention d'un échantillon peut demander plusieurs tirages de la paire aléatoire (ξ_1, ξ_2). Son efficacité est le rapport de l'aire sous la courbe $f(x)$ sur l'aire du rectangle englobant : $\frac{1}{(b-a)\sup f(x)}$.

1.4.3 Techniques de marche aléatoire

La marche aléatoire est aussi bien utilisée pour les intégrations de Monte Carlo que pour les simulations de Monte Carlo. Elle permet, dans le premier cas, de calculer une solution approchée d'un problème mathématique complexe, dans le second, de simuler des comportements aléatoires.

Une marche aléatoire est une suite de pas aléatoires successifs. Elle est définie par :

- un ensemble P de tous les pas possibles dans le système,

- un pas de départ p_d,
- une fonction de transition T à partir d'un pas p. C'est une fonction de densité de probabilité qui permet de passer d'un pas p à un pas p'.

D'après cette définition, la marche aléatoire n'a pas de fin : la fonction de transition vérifiant l'équation 1.56, il existe toujours une transition d'un pas à un autre. Pour pallier ce problème, il faut ajouter à l'ensemble des pas P un pas particulier p_a, appelé pas d'absorption, vérifiant :

$$\begin{aligned} T(p_a, p) &= 0 \quad si\ p \neq p_a && (1.65)\\ &= 1 \quad si\ p = p_a && (1.66) \end{aligned}$$

Si dans le système, $\forall p \in P,\ T(p, p_a) = 0$ alors la marche aléatoire n'a pas de fin.

La marche aléatoire dans un système se termine en un nombre fini de pas si, pour tout pas p de P, il existe une suite de transitions menant au pas absorption p_a.

1.4.4 Intégration de Monte Carlo

L'évaluation numérique d'une intégrale peut s'effectuer par une méthode de Monte Carlo, appelée quadrature de Monte Carlo [SG69] [Bus66].

Le but de cette intégration est d'évaluer la valeur G de l'intégrale sur un domaine S d'une fonction g.

$$G = \int_{x \in S} g(x)dx \tag{1.67}$$

D'après l'équation 1.58, nous savons que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire a de fonction de densité de probabilité p est :

$$E(a) = \int_{u \in S} up(u)du \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \tag{1.68}$$

En posant $a = f(x)$ avec x variable aléatoire de fonction de densité de probabilité p', nous obtenons :

$$E(f(x)) = \int_{u \in S'} f(u)p'(u)du \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \tag{1.69}$$

En réécrivant $g(x) = f(x)p(x)$, nous pouvons calculer une valeur approchée G' de G.

$$\begin{aligned} G &= \int_{u \in S} f(u)p(u)du && (1.70)\\ G' &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) && (1.71)\\ G' &\approx G && (1.72) \end{aligned}$$

La variance de G' est fonction de la variance de $f(x)$:

$$var(G') = \frac{1}{N} var(f(x)) \tag{1.73}$$

Pour réduire cette variance, et donc améliorer la qualité de l'estimation sans augmenter le nombre d'échantillons, il existe deux techniques d'échantillonnage : l'échantillonnage d'importance et l'échantillonnage stratifié.

Le principe de l'échantillonnage d'importance est de choisir une fonction f en x de variance faible, voire nulle. Ceci correspond à une fonction variant peu sur le domaine d'intégration, l'idéal étant une fonction constante (variance nulle). Il faut donc choisir une fonction de densité de probabilité p dont la forme est similaire à celle de g : grande lorsque $g(x)$ est grand et petite lorsque $g(x)$ est petit. L'idéal est de choisir $p(x) = \frac{g(x)}{G}$ de façon à obtenir la fonction constante $f(x) = G$. Malheureusement, G est la valeur que l'on cherche à estimer. Il est donc impossible de faire une estimation de G sans erreur, à moins de déjà connaître la valeur de G.

L'échantillonnage stratifié réduit la variance de G' en divisant le domaine d'intégration S en m sous domaines $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

$$G = \int_{u \in S} f(u)p(u)du = \sum_{i=1}^{m} \int_{u \in S_i} f_i(u)p_i(u)du \tag{1.74}$$

Les fonctions f_i et p_i sont généralement exprimées respectivement en fonction de f et p.

$$f_i(x) = P_i f(x) \quad et \quad p_i(x) = \frac{p(x)}{P_i} \quad avec \quad P_i = \int_{S_i} p(x) \tag{1.75}$$

L'estimation G'' est alors calculée comme la somme des estimations G'_i de G sur chaque sous domaine S_i.

$$G'' = \sum_{i=1}^{m} G'_i \quad avec \quad G'_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} f_i(x_j) = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} P_i f(x_j) \tag{1.76}$$

La somme des variances des estimations G'_i est inférieure à la variance totale de l'estimation G' [MP93].

$$\sum_{i=1}^{m} var(G'_i) \leq var(G') \tag{1.77}$$

Chapitre 2

Simulation de Monte-Carlo en milieux participants

De par leur souplesse, les méthodes de Monte Carlo se prêtent bien à la résolution des équations de rendu sans hypothèses restrictives. Cette approche nous a donc semblé judicieuse pour étudier une méthode de rendu des milieux participants ne comportant aucune hypothèse restrictive sur les caractéristiques du milieu : géométrie, densité, nombre de diffusions, fonctions de phases... Nous proposons donc d'utiliser ces méthodes dans le cadre de notre notre modèle particulaire de la lumière pour évaluer la luminance diffusée en chaque point du milieu.

Les méthodes de Monte Carlo ont déjà donné lieu à de nombreux travaux en synthèse d'image [CPC84] [LRU85] [Kaj86], surtout dans le domaine de l'intégration. Pourtant, leur quasi-totalité a conservé l'hypothèse d'un milieu non-participant, se limitant ainsi aux objets surfaciques. Les travaux utilisant cette approche pour le rendu des milieux participants sont récents et peu nombreux. Comme notre méthode [BLS92] [BLS93], ils sont tous fondés sur une simulation de Monte Carlo d'un modèle particulaire de la lumière.

Ces méthodes de simulation en milieu participant calculent, soit la luminance présente en chaque point du milieu, soit la luminance du milieu perçue par un observateur virtuel. Dans les deux cas, le résultat R obtenu est une approximation de la valeur exacte R_{exact}.

$$R = R_{exact} + \Delta R \tag{2.1}$$

L'erreur ΔR est une variable aléatoire, de moyenne 0 et de variance g. Cette variance est appelée la variance de la méthode. Plus elle est petite, et plus l'erreur commise ΔR est faible. La qualité d'une méthode est mesurée par sa rapidité de convergence. C'est est le produit de l'erreur ΔR du résultat obtenu et du nombre de photons utilisés lors de la simulation. Plus ce produit est faible et meilleure est la convergence. La conception d'une simulation de Monte Carlo de bonne qualité va donc nécessiter la mise au point de techniques permettant de diminuer la variance pour un nombre de photons constants.

Deux simulations ont été proposées pour évaluer les équations d'image en présence d'un milieu participant dans des cas très précis : la visualisation des signaux lumineux de sortie lors d'un incendie [BRB93] et la mesure de la visibilité des objets de nuit dans le brouillard en tenant compte de l'éclairage public et des phares d'une voiture [BMG94]. Elles sont directement issues des méthodes de simulation utilisées en physique nucléaire [SG69]. Elles simulent totalement le processus physique en suivant les photons depuis les sources lumineuses jusqu'à un écran ou un oeil virtuel. Ces méthodes convergent très lentement vers le résultat exact, car un très faible pourcentage des photons émis contribue à l'image finale en touchant l'écran ou l'oeil. Pour obtenir une convergence acceptable et diminuer la variance de la méthode, Rozé et al [BMG94] doivent modéliser l'oeil par un disque de 0.8m de rayon. Pour obtenir des images en un temps raisonnable (10 minutes), Roysam et al [BRB93] font appel au parallélisme : les simulations de Monte Carlo étant complètement parallélisables, ils ont implémentés leur simulation sur une Connection Machine comportant 32768 processeurs.

Pattanaik et al [PM93a] ont développé une simulation de Monte Carlo beaucoup plus générale, assez proche de la notre. Cette méthode est une extension aux milieux participants de celle exposée dans [PM92]. Elle converge beaucoup plus rapidement que les deux méthodes précédentes, car elle ne simule pas complètement le processus physique. Comme beaucoup de méthodes de rendu en synthèse d'image [CCWG88][LS92], deux passes sont utilisée : une passe d'illumination, dans laquelle la simulation de Monte Carlo est effectuée et une phase de visualisation, où l'on calcule la luminance perçue par l'observateur. Cependant, bien qu'elle permette théoriquement de traiter tous les types de diffusion dans le milieu, les auteurs se sont limités à la diffusion isotrope.

Finalement, Lafortune and Willems [LW96] ont proposé une méthode hybride combinant une simulation et une intégration de Monte Carlo.

Nous allons tout d'abord présenter le principe général de la simulation du modèle particulaire de la lumière dans un milieu participant. Cette méthode simple utilise un modèle physique de la lumière et souffre d'une variance importante. Nous étudierons ensuite comment diminuer cette variance en nous éloignant du modèle physique de la lumière. Nous aboutirons ainsi à un nouvel algorithme. Puis, nous détaillerons les deux points importants de la simulation : le choix de la direction de diffusion et le choix du point de diffusion. Nous présenterons finalement deux méthodes de rendu utilisant cette simulation.

2.1 Principe général des simulations de Monte Carlo

L'objectif de la simulation est de modéliser la propagation de la lumière dans un milieu participant à partir des sources lumineuses. On utilise pour cela un modèle particulaire de la lumière. Ce modèle peut être très proche de la nature, comme celui utilisé dans [BRB93], ou plus théorique, comme celui que nous proposons au chapitre I. Ces photons sont émis depuis les sources lumineuses et se propagent dans la scène modélisée. Lorsqu'ils pénètrent dans le milieu participant, ils interagissent avec lui : ils sont diffusés ou absorbés par les particules composant le milieu. C'est la diffusion des photons par les particules qui définit l'illumination du milieu. Leur propagation continue jusqu'à ce qu'ils soient absorbés ou qu'ils quittent le milieu.

La propagation des photons se formalise sous la forme d'une marche aléatoire. Le pas de départ de la marche est défini par quatre paramètres :

1. la ou les longueurs d'onde pour lesquelles le photon transporte un quantum d'énergie.
2. la source lumineuse émettant le photon,
3. la direction de l'émission,
4. la position de l'émission du photon à la surface de la source si elle est surfacique ou à l'intérieur si celle-ci est volumique,

Le choix du pas de départ est intégralement stochastique. Chacun de ces paramètres est considéré comme une variable aléatoire avec sa fonction de densité de probabilité. Chaque paramètre est tiré aléatoirement selon sa fonction de densité de probabilité.

La fonction de densité de probabilité de chaque paramètre est :

1. pour la longueur d'onde, le spectre d'émission de la scène. Ce spectre est la somme des spectres d'émission de chaque source de la scène.
2. pour la source lumineuse émettant le photon, la distribution de la puissance des sources émettrices pour la longueur d'onde choisie.
3. pour la direction de l'émission, la fonction de distribution goniométrique de la source lumineuse choisie, pour la longueur d'onde choisie.
4. la position de l'émission du photon, une fonction permettant un échantillonnage uniforme de la géométrie de la source. Plusieurs fonctions sont proposées dans [PM93a] pour différentes surfaces.

Ce choix de fonction est arbitraire. D'autres choix sont évidement possibles.

La fonction de transition T pour passer d'un pas de la marche au suivant est une composition de plusieurs fonctions de densité de probabilité, continues ou discrètes :

1. la probabilité d'interaction ω du photon avec une particule du milieu. Cette probabilité est liée la transmittance du milieu.

   $$\text{Prob(interaction entre P et P}') = 1 - e^{-\int_P^{P'} k_t(P'')dP''} \tag{2.2}$$

   où $k_t(P'')$ est le coefficient d'extinction du milieu en P'', pour la longueur d'onde portée par le photon. Un photon ne peut donc pas porter plusieurs longueurs d'onde de coefficient k_t différent. Pour cet raison, on se limite généralement à une seule longueur d'onde par photon. Notre modèle particulaire de la lumière comportant plusieurs longueurs d'onde par photon, cette probabilité ne peut pas être utilisée telle quelle. Nous proposons dans la section 2.3 une nouvelle à ce problème.

2. la probabilité ι du type d'interaction : absorption ou diffusion. Cette fonction de densité de probabilité est discrète. Elle est définie à partir de l'albédo γ des particules du milieu :

$$\begin{aligned} \iota(x) &= \frac{1}{\gamma} \ \ \forall x \in [0, \gamma] \\ &= 0 \ \ \forall x \in]\gamma, 1] \end{aligned}$$

Comme l'albédo γ peut varier, cette fonction dépend aussi de la longueur d'onde.

3. la probabilité de diffusion du photon dans une direction. Cette fonction de densité de probabilité est en fait la fonction de phase φ .

L'algorithme de la simulation est le suivant :

Tant qu'il reste de l'énergie à émettre :
    Choisir un pas de départ.
    Mettre à jour le flux émis par la source lumineuse choisie.
    Répéter Jusqu'à ce que le photon soit absorbé ou qu'il quitte le milieu participant :
        Choisir le point d'interaction.
        Si ce point est dans le milieu participant, alors
            Choisir le type d'interaction (absorption ou diffusion).
            Si l'interaction est une diffusion, alors
                Mettre à jour le flux émis par ce point du milieu participant.
                Choisir une direction de diffusion.
            Sinon
                Absorber le photon.

Cette première méthode simule exactement le modèle physique de la lumière. Le photon est une entité indivisible, porteur d'un quantum constant d'énergie pour une unique longueur d'onde. L'interaction avec le milieu participant est un phénomène aléatoire binaire : le photon est, soit totalement absorbé, soit totalement diffusé. Il résulte de cette approche une grande variance du résultat et une convergence lente de la méthode. Pour diminuer cette variance, il faut s'éloigner du modèle physique de la lumière pour utiliser un modèle moins proche de la réalité. Certaines techniques deviennent utilisables pour améliorer la convergence. Nous présentons dans la section 2.2 une technique fondée sur une calcul exact de l'absorption. La section 2.3 présente deux techniques, fondées sur une augmentation du nombre de points de diffusions.

2.2 Diminution de la variance du résultat par le calcul exact de l'absorption

Cette simulation modèle complètement le processus physique de la propagation de la lumière. Tous les phénomènes entrant en jeu (choix du point d'interaction, type d'interaction et direction de diffusion) sont simulés de manière probabiliste par un échantillonnage stochastique de fonctions de probabilité de densité. Comme tout processus d'échantillonnage, si les échantillons ne sont pas assez nombreux, ils ne représentent pas correctement la fonction échantillonnée. Il en résulte une erreur, responsable de la variance de la méthode. Il est donc intéressant de diminuer, voire de supprimer l'aspect aléatoire de certains points de la simulation pour en diminuer la variance.

On peut appliquer ceci au calcul de l'absorption. Une technique classique est la méthode de suppression de l'absorption proposée dans [LJ84] : lorsqu'un photon intercepte une particule du milieu, une partie de son énergie est absorbée : $1-\gamma$ où γ est l'albédo de la particule. Le photon est ensuite diffusé dans une nouvelle direction avec l'énergie restante. En cas de sous-échantillonnage des points d'interaction, cette méthode permet de réduire la variance du calcul de l'absorption et de la diffusion, sans toutefois l'éliminer. Cette technique est utilisée dans [PM93a] pour réduire l'absorption.

Nous proposons une nouvelle méthode, calculant l'atténuation sans erreur quel que soit le taux d'échantillonnage des points d'interaction. Nous considérons les phénomènes d'absorption et de diffusion comme deux phénomènes indépendants et nous les traitons séparément. L'absorption est considérée comme un phénomène continu se situant au niveau du volume. Nous avons en quelque sorte "dilué" l'absorption des particules dans le volume qui les contient. L'absorption entre deux point P et P' est alors donnée par le facteur d'atténuation volumique $K_{\mathrm{v}}(P,P')$ (Equation 1.50). Ce facteur est calculé par une intégration numérique sur le chemin entre P et P'. Si le chemin entre P et P' peut être divisé en n segments de caractéristiques homogènes (coefficient d'absorption k_a constant sur le segment), cette intégration se réduit à la somme suivante :

$$K_{\mathrm{v}}(P,P') = e^{-\sum_{i=1}^{n} k_a(i)\Delta_i} \tag{2.3}$$

où $k_a(i)$ est le coefficient d'absorption du segment i et Δ_i est sa longueur.

La diffusion est quant à elle toujours modélisée comme une phénomène discret se situant au niveau des particules. Elle est échantillonnée de façon similaire à la méthode précédente. Cependant, le choix du point d'interaction ne dépend plus que des caractéristiques de diffusion des particules du milieu. Il faut donc utiliser le coefficient de diffusion k_d et non plus le coefficient d'extinction $k_t = k_a + k_d$.

$$\text{Prob(interaction entre P et P}') = 1 - e^{-\int_P^{P'} k_d(P'')dP''} \tag{2.4}$$

où $k_d(P'')$ est le coefficient de diffusion du milieu au point P''.

Ce calcul précis de l'atténuation est peu pénalisant en temps, car la détermination du point d'intersection nécessite un calcul identique. Cette méthode présente néanmoins un inconvénient : la probabilité d'interaction pour la diffusion seule est inférieure à celle pour la diffusion et l'absorption réunies. En effet

$$k_t = k_a + k_d \tag{2.5}$$

Donc

$$k_d \leq k_t \tag{2.6}$$

et

$$1 - e^{-\int_P^{P'} k_d(P'')dP''} \leq 1 - e^{-\int_P^{P'} k_t(P'')dP''} \tag{2.7}$$

Le nombre de points d'interaction sera donc toujours inférieur à celui de la méthode de suppression de l'absorption et, par conséquent, la variance dans le calcul de la diffusion sera supérieure. Cette variance sera d'autant plus importante que l'albédo des particules est faible, c'est à dire lorsque k_d est beaucoup plus petit que k_t. Mais dans cette situation, la lumière est rapidement absorbée par le milieu et l'absorption prend le pas sur la diffusion qui devient secondaire.

Dans ces deux méthodes, il n'y a plus d'absorption totale d'un photon. A moins de quitter le milieu ou d'intercepter une particule d'albédo nul, la marche aléatoire du photon n'a pas de fin. Une solution simple consiste à interrompre la marche lorsque l'énergie portée par le photon descend en dessous d'un certain seuil. Malheureusement, cette absorption forcée introduit un biais systématique en diminuant artificiellement la quantité d'énergie dans la scène. Lorsqu'on applique cette troncation à un grand nombre de photons, ce biais introduit une erreur significative dans l'illumination du milieu. Ce biais peut-être éliminé en utilisant la technique dite de la roulette russe [AK90] [LJ84] [SG69] : lorsque l'énergie portée par le photon descend en dessous du seuil choisi, celui-ci est absorbé avec une probabilité arbitraire p ou continue sa marche avec une probabilité de $1-p$, mais avec une énergie augmentée de $\frac{1}{1-p}$. Si ω est l'énergie portée par la photon avant l'application de la roulette russe et W celle après la roulette russe, l'espérance mathématique de W, notée $E(W)$ est :

$$\begin{aligned} E(W) &= \text{Prob(absorbe)} * 0 + \text{Prob(continue)} * \frac{\omega}{1-p} \\ &= p * 0 + (1-p) * \frac{\omega}{1-p} \\ &= \omega \end{aligned}$$

En moyenne, la particule aura une énergie correcte. Cette technique augmente légèrement la variance de la méthode : plus la probabilité d'absorption p est élevé, plus les photons porteur d'une faible énergie sont absorbés et plus la variance est élevée. Ceci est compensé par le fait que l'on peut considérer plus de photons pour un même coût de calcul. L'élimination du biais garantit la convergence vers le résultat correct.

Lorsqu'on inclut, dans la simulation, le calcul exact de l'absorption et la technique de la roulette russe pour diminuer la variance, notre algorithme est le suivant :

Tant qu'il reste de l'énergie à émettre :
    Choisir un pas de départ.
    Mettre à jour le flux émis par la source lumineuse choisie.
    Répéter jusqu'à ce que le photon soit absorbé ou qu'il quitte le milieu participant :
        Choisir le point de diffusion.
        Atténuer l'énergie portée par le photon par l'absorption due à la traversée éventuelle du milieu.
        Si ce point est dans le milieu participant, alors
            Mettre à jour le flux émis par ce point du milieu participant.
            Choisir une direction de diffusion.
            Si l'énergie portée par le photon est inférieure au seuil, alors
                Choisir par une roulette russe entre l'absorption du photon et la poursuite de la marche aléatoire.
                Si on continue
                    Multiplier l'énergie du photon par $\frac{1}{1-p}$
                Sinon
                    Absorber le photon.

Nous détaillons dans les deux sections suivantes deux points importants de cet algorithme : le choix des points de diffusion et le choix des directions de diffusion.

2.3 Choix des points de diffusion

La loi de Bouguer restreinte à la diffusion exprime l'atténuation par diffusion de la luminance de la lumière par le milieu participant entre deux points P et P' :

$$e^{-\int_P^{P'} k_d(P'')dP''} \leq 1 \tag{2.8}$$

Elle peut être interprétée comme la probabilité pour un photon de voyager entre P et P' sans être diffusé. La probabilité $\omega_t(P, P')$ qu'un photon subisse une diffusion entre P et P' est donc :

$$\omega_t(P, P') = 1 - e^{-\int_P^{P'} k_d(P'')\, dP''} \tag{2.9}$$

Cette probabilité est la probabilité cumulative de diffusion du photon avec tous les points entre P et P'. Elle est fonction de la longueur d'onde à cause de la dépendance spectrale de k_d.

Cette probabilité peut être utilisée comme une fonction de distribution cumulative F caractérisant la variable aléatoire P_i, point de diffusion du photon avec le milieu. Cette variable est échantillonnée grâce à la technique de transformation de variable aléatoire

[LJ84] en résolvant l'équation $F(P_i) = \xi$ où ξ est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

$$\xi = 1 - e^{-\int_P^{P_i} k_d(P'')\, dP''} \text{ ou } 1 - \xi = e^{-\int_P^{P_i} k_d(P'')\, dP''} \tag{2.10}$$

ξ étant uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,1]$, $(1-\xi) = \xi_1$ est aussi uniformément distribuée sur $[0,1]$. L'équation d'échantillonnage devient

$$\xi_1 = e^{-\int_P^{P_i} k_d(P'')\, dP''} \text{ ou } \ln \xi_1 = -\int_P^{P_i} k_t(P'')\, dP'' \tag{2.11}$$

Pour déterminer le point de diffusion P_i, il suffit de résoudre numériquement cette intégrale de la même façon que pour le calcul du facteur d'atténuation volumique K_v. La probabilité d'interaction étant fonction de la longueur d'onde, cette technique pour déterminer les points de diffusion photon-milieu participant est utilisable seulement si le photon porte une seule longueur d'onde ou si le coefficient d'extinction k_d est le même pour toutes les longueurs d'onde portées par le photon.

Dans notre modèle particulaire de la lumière, un photon porte plusieurs longueurs d'ondes, mais les caractéristiques optiques du milieu pour chacune d'elles sont indépendantes. Nous ne pouvons donc pas utiliser cette technique. Nous devons définir une méthode adaptée à notre modèle. Pour déterminer le point de diffusion d'un photon avec le milieu, nous proposons une méthode incrémentale stochastique, utilisant telle qu'elle la probabilité de diffusion. Cette méthode est apparentée à la méthode de la roulette russe. Le photon progresse incrémentalement dans le milieu participant, par pas de longueur d. Nous calculons la probabilité de diffusion ω_{λ_i} pour chaque longueur d'onde λ_i portée par le photon en fonction de la longueur d du pas et de la densité du milieu traversé. Nous calculons aussi sur le pas une probabilité de diffusion moyenne ω_m. Cette probabilité est utilisée pour effectuer un tirage aléatoire de la diffusion. Nous tirons un nombre aléatoire ξ uniformément réparti sur $[0,1]$.

- Si $\xi \leq \omega_m$, l'énergie de chaque longueur d'onde portée par le photon est multipliée par $\frac{\omega_{\lambda_i}}{\omega_m}$ et le photon est diffusé par le milieu. En effet, si nous considérons un photon incident portant pour une seule longueur d'onde λ_i un quantum q_{λ_i}, l'espérance mathématique de la quantité d'énergie $Q^d_{\lambda_i}$ diffusée par le milieu est :

$$E(Q^d_{\lambda_i}) = q_{\lambda_i}\omega_{\lambda_i} \tag{2.12}$$

Or en utilisant une probabilité moyenne de diffusion ω_m, cette espérance mathématique devient :

$$E(Q^d_{\lambda_i}) = q_{\lambda_i}\omega_m \tag{2.13}$$

Il faut donc multiplier l'énergie de chaque longueur d'onde portée par le photon par $\frac{\omega_{\lambda_i}}{\omega_m}$ obtenir une quantité d'énergie correcte.

$$\begin{aligned} E(Q^d_{\lambda_i}) &= q_{\lambda_i}\omega_m\frac{\omega_{\lambda_i}}{\omega_m} \\ &= q_{\lambda_i}\omega_{\lambda_i} \end{aligned} \tag{2.14}$$

- Si $\xi > \omega_m$, le photon continue sa trajectoire sans changement de direction et, pour la même raison que pour la diffusion, l'énergie de chaque longueur d'onde portée par le photon est multipliée par $\frac{1-\omega_{\lambda_i}}{1-\omega_m}$.

Si l'énergie portée par le photon pour la longueur d'onde λ_i vaut q_{λ_i} avant le test de diffusion et Q_{λ_i} après le test, l'espérance mathématique de Q_{λ_i} est :

$$\begin{aligned}
E(Q_{\lambda_i}) &= q_{\lambda_i}(\text{Prob(interaction)}\frac{\omega_{\lambda_i}}{\omega_m} + \text{Prob(continue)}\frac{1-\omega_{\lambda_i}}{1-\omega_m}) \\
&= q_{\lambda_i}(\omega_m\frac{\omega_{\lambda_i}}{\omega_m} + (1-\omega_m)\frac{1-\omega_{\lambda_i}}{1-\omega_m}) \\
&= q_{\lambda_i}
\end{aligned}$$

qui est l'énergie initiale du photon. En moyenne, cette méthode n'ajoute pas d'énergie dans la scène, ni n'en enlève. Par conséquent, elle n'introduit pas de biais dans l'illumination de la scène.

Pour échantillonner les points de diffusion avec une qualité proche de celle obtenue en les échantillonnant séparément pour chaque longueur d'onde, nous utilisons une moyenne des probabilités de chaque longueur d'onde λ_i, pondérée par le quantum d'énergie q_{λ_i} de chaque longueur d'onde :

$$\omega_m = \frac{\sum_{i=1}^n q_{\lambda_i}\omega_{\lambda_i}}{\sum_{i=1}^n q_{\lambda_i}} \tag{2.15}$$

où n est le nombre de longueurs d'onde portées par le photon.

Pour ces deux méthodes, la détermination des points de diffusion est gouvernée par la loi de Bouguer. Si le milieu est faiblement participant, une part importante des photons pénétrant dans le milieu le traverse sans subir de diffusion. Si le nombre de photons entrants n'est pas assez important, le nombre de points de diffusion est trop faible pour obtenir une illumination correcte du milieu participant : la variance du résultat obtenu est trop importante pour que ce dernier soit considéré comme correct. Une solution pour remédier à ce problème est la méthode de l'interaction forcée [LJ84][PM93a] pour diminuer cette variance. Le milieu participant est alors subdivisé en volumes élémentaires. Les caractéristiques optiques sont constantes à l'intérieur de chacun d'eux. Lorsqu'un photon, porteur d'une énergie q, traverse un de ces volumes sur une distance S, il est entre obligatoirement en interaction avec le volume, y perd une énergie $q(1-e^{-k_dS})$ et le quitte dans la même direction avec une énergie qe^{-k_dS}. Un photon diffusé est alors engendré à l'intérieur de ce volume avec une énergie $q(1-e^{-k_dS})$. La position de ce photon est alors donnée par :

$$x = -\frac{1}{k_d}\ln[1-\xi(1-e^{-k_tS})] \tag{2.16}$$

où x est la distance par rapport au point d'entrée du photon dans le volume et k_d le coefficient de diffusion du volume [PM93a]. Chaque photon se divisant en deux lors de la traversée d'un volume élémentaire, on assiste alors, si on ne contient pas ce processus, à une explosion combinatoire du nombre de photons. En contre partie, à qualité égale, on a besoin de beaucoup moins de photons pénétrant dans le milieu.

Pour résoudre ce problème du sous-échantillonnage des points de diffusion, nous proposons une méthode différente qui conserve le principe des chaînes de Markov, et évite ainsi une augmentation du nombre de photons dans le milieu. Elle est issue de l'observation d'une propriété fondamentale de notre méthode initiale. D'après l'équation 2.14, la probabilité moyenne de diffusion ω_m n'influe pas sur la quantité d'énergie diffusée dans le milieu. Par contre, elle conditionne la qualité de l'échantillonnage des points de diffusion en contrôlant leur nombre. En cas de sous-échantillonnage des points de diffusion, nous pouvons utiliser cette propriété pour en augmenter le nombre en utilisant une probabilité de diffusion plus élevée. Pour cela, nous la multiplions par une constante C supérieure à un :

$$\omega_m = C\frac{\sum_{i=1}^{n} q_{\lambda_i}\omega_{\lambda_i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{\lambda_i}} \tag{2.17}$$

Comme pour la roulette russe, cette technique augmente la variance, mais ceci est compensé par l'augmentation du nombre de points de diffusion dans le milieu participant. Il faut cependant veiller à ce que la probabilité de diffusion ne soit pas trop importante afin d'obtenir une répartition correcte des points de diffusion. En effet, si la probabilité qu'un photon effectue n pas avant d'être diffusé par le milieu est $(1-\omega_m)^n$. Si ω_m est trop grand, cette probabilité devient rapidement négligeable. Malgré un nombre plus important de points d'interaction, la position des points de diffusion est mal échantillonnée et la variance dans l'illumination du milieu est plus importante.

La figure 2.1 montre un milieu faiblement participant de densité constante, illuminé sans cette technique. De nombreux photons le traversent sans subir de diffusion : chaque photon subit seulement en moyenne 0.14 diffusions. L'illumination du milieu présente une variance importante. La figure 2.2 montre le même milieu, mais illuminé cette fois ci en augmentant la probabilité de diffusion. La constante C est fixée à 10. Il y a maintenant 0.72 diffusions par photon en moyenne et l'illumination du milieu est moins bruitée. Si nous augmentons C jusqu'à 40 (Figure 2.3), les points de diffusion sont mal positionnés et la variance augmente de nouveau.

Toutes les techniques présentées dans cette section pour déterminer les points de diffusion peuvent être étendues à la détermination des points d'interaction (absorption et diffusion). Il suffit pour cela de remplacer le coefficient de diffusion k_d par le coefficient d'extinction k_t.

2.4 Choix de la direction de diffusion

La direction de diffusion est déterminée en échantillonnant une variable aléatoire V indiquant une direction. La fonction de densité de probabilité la décrivant est la fonction de phase φ des particules du milieu participant. Celle-ci a, en effet, toutes les caractéristiques d'une fonction de densité de probabilité. Une direction pouvant s'exprimer en coordonnées hémisphériques sous la forme d'un angle polaire θ et d'un angle azimutal ϕ, échantillonner V revient à échantillonner ces deux angles aléatoires.

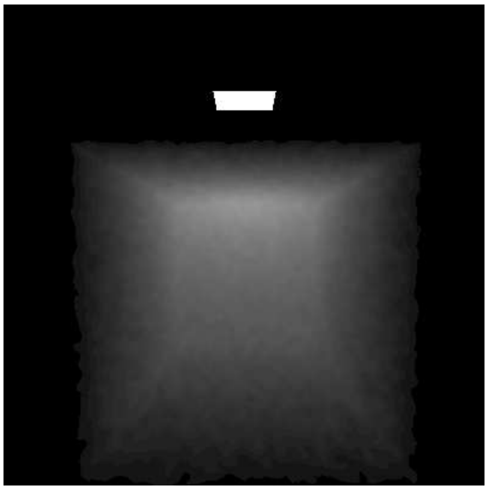


Figure 2.1 : $C = 1$

Figure 2.2 : $C = 10$

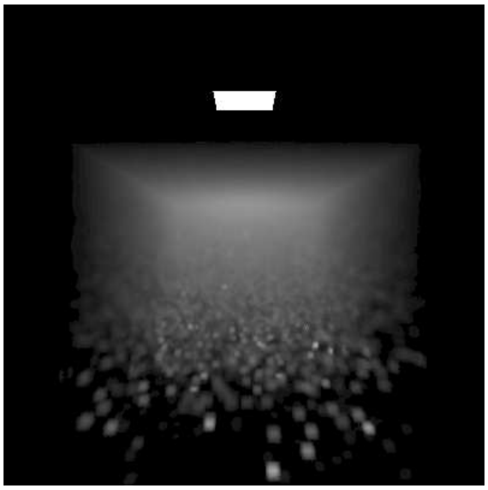


Figure 2.3 : $C = 40$

La fonction de phase est une fonction de l'angle polaire θ et de l'angle azimutal ϕ, exprimés dans le repère orthonormé $(P, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, où P est le point d'interaction et $\vec{k}$ la direction initiale du photon. Cette fonction présentant une symétrie axiale par rapport l'axe $\vec{k}$, elle est généralement exprimée uniquement en fonction de θ.

L'angle azimutal ϕ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$. On utilise pour l'échantillonner la technique de transformation de variable aléatoire d'une variable aléatoire ξ uniformément répartie sur $[0, 1]$:

$$\phi = 2\pi\xi \quad avec \quad \xi \in [0, 1] \tag{2.18}$$

L'angle polaire θ est une variable aléatoire sur $[0, \pi]$. On le remplace souvent, pour des raisons pratiques, par son cosinus $t = \cos\theta$, avec $t \in [0, 1]$. L'échantillonnage de t est plus coûteux que celui de ϕ car sa fonction de densité de probabilité est la fonction de phase du milieu. Pour des raisons d'efficacité, un échantillonnage par rejet ne peut être employé, étant donné le nombre important de d'échantillons tirés lors d'une simulation. Nous lui préférons la technique de transformation de variable aléatoire, beaucoup plus efficace et rapide. La fonction de phase choisie doit donc être intégrable et inversible. De plus, la fonction ainsi obtenue doit être rapide à calculer. Parmi les fonctions de phases que nous avons présentées au chapitre précédant, seules la fonction de Henyey-Greenstein et notre fonction répondent à ce cahier des charges.

La transformation de la variable aléatoire uniforme ξ pour échantillonner t en utilisant la fonction de Henyey-Greenstein est :

$$t = \frac{1}{2k}\left[1 - \left(\frac{1-k^2}{1+k-2k\xi}\right)^2 + k^2\right] \tag{2.19}$$

Celle utilisant notre fonction est :

$$t = \frac{2\xi + k - 1}{2k\xi - k + 1} \tag{2.20}$$

Bien que la première transformation semble plus coûteuse au premier abord, dans un implémentation optimisée les deux ont le même coût de calcul : 1 division, 2 multiplications et 2 additions.

Lorsque la fonction de phase utilisée est une somme normalisée de n fonctions de phases φ_{k_i} (Equation 1.32), nous effectuons au préalable un échantillonnage d'une variable aléatoire discrète pour déterminer laquelle doit être utilisée. Les valeurs de la fonction de densité de probabilité discrète décrivant cette variable sont les n coefficients r_i de la somme normalisée. Nous construisons à partir des r_i les valeurs c_j de la fonction cumulative discrète de distribution :

$$c_j = \sum_{i=1}^{j} r_i \quad avec \quad j \in [1, n] \quad et \ c_n = 1 \tag{2.21}$$

L'échantillonnage de cette distribution est simple : un nombre aléatoire uniforme ξ sur $[0, 1]$ est généré et le plus grand j tel que $\xi \leq c_m$ est recherché. Alors la fonction φ_{k_j} est celle à échantillonner.

2.5 Implémentation

2.5.1 Modélisation du milieu

Les milieux participants font partie de la classe des objets volumiques. Cette classe regroupe les objets qui ont un volume, mais pas de surface bien définie. La modélisation des objets volumiques a donné lieu à de nombreux travaux de recherche. Certains sont très généraux et peuvent s'appliquer à la modélisation de nombreux objets, tandis que d'autres sont spécialisés dans la modélisation des milieux participants.

Le modèle le plus simple est le milieu complètement homogène : toutes ses caractéristiques (densité, coefficients d'absorption et de diffusion) sont constantes pour tous les points où il est défini. Ce type milieu sert généralement à modéliser à faible coût l'atmosphère d'une scène qui est intégralement plongée dedans. Lorsqu'on définit sa frontière par des surfaces simples, on peut l'utiliser pour modéliser des objets simples, comme les anneaux de Saturne [Bli82], une nappe de brouillard [Kla87]. En définissant plusieurs strates de ce type avec des caractéristiques variables, Nishita et al [NMN87] et Klassen [Kla87] modélisent des atmosphères plus complexes.

Une deuxième approche consiste à modéliser le milieu de manière fonctionnelle. Cette fonction, de complexité variable, définit généralement la densité du milieu pour chaque point de l'espace. Dans [NSTN93], les auteurs modélisent l'atmosphère terrestre en combinant deux milieux de caractéristiques différentes et en faisant varier leur densité selon une fonction simple de l'altitude. Pour des atmosphères plus perturbées, certain auteurs utilisent des fonctions empiriques de turbulences définissant une texture solide tri-dimensionnelle [Per85] [PH89] [Pea85] représentant les densités du milieu. Dans [EP90], les auteurs modélisent l'atmosphère enfumée d'une pièce grâce aux fonctions de turbulences de Perlin [Per85]. Cependant, cette approche, économique en mémoire, nécessite l'évaluation de la fonction à chaque fois qu'il faut connaître la densité d'un point. Cette évaluation devient coûteuse en temps dès que la fonction devient complexe. Par exemple, elle prend 65% du temps de calcul de la méthode de rendu utilisée par les auteurs. Lorsque la modélisation du milieu participant est complexe, il est donc nécessaire d'effectuer, dans une première phase, une tabulation de la fonction que l'on stockera dans une structure adaptée. On utilise généralement une grille tri-dimensionnelle de parallélépipèdes rectangles appelés voxels (Figure 2.4. Les caractéristiques du milieu sont constantes à l'intérieur d'un même voxel. Pour éviter un aspect cubique lors de la visualisation du milieu, il est nécessaire d'effectuer un lissage de la grille pour obtenir une description continue de la densité du milieu. La densité en un point est alors calculée par interpolation de la densité au centre des voxels voisins.

Ce calcul préalable du milieu permet l'utilisation de modèles plus complexes. Les nuages peuvent être généré par un modèle physique [KV84] [RY89], par un système de particules [Ree83] ou plus simplement par des fractales [Vos85]. On retrouve aussi l'approche fonctionnelle décrite au paragraphe précédant, mais avec des fonctions beaucoup plus complexes. Max, dans [Max94], modélise les nuages en combinant les fonctions de Perlin

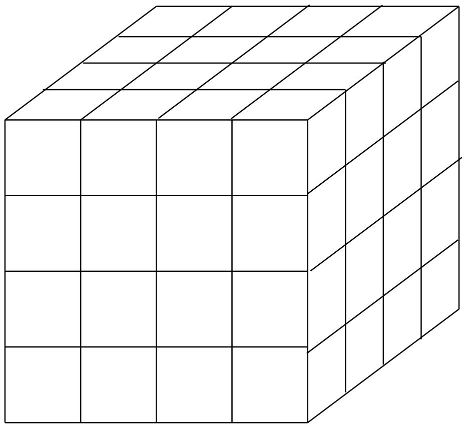


Figure 2.4 : Grille de voxels

avec une variante du modèle visuel de nuage de Gardner [Gar85] : le nuage est défini par un ensemble d'ellipsoïdes dont la surface est perturbée par les fonctions de Perlin. A l'intérieur de chaque ellipsoïde, la densité est calculée par des séries trigonométriques. Sakas [SW92a][Sak93] donne des fonctions de turbulences plus évoluées et plus proche de la physique, adaptée à la modélisation des milieux participants. De plus, dans [SK91], il propose une méthode pour générer directement un milieu participant de la forme voulue, plutôt que sculpter dans la texture solide une forme définie par des surfaces. Stam et Fiume [SF93][SF95] modélisent et animent les milieux participant en utilisant un processus de diffusion des densités tenant compte de l'influence du vent. C'est un modèle empirique, mais qui reste physiquement plausible. Stam et Fiume proposent de plus une alternative à la grille de voxels. Ils modélisent le milieu sous forme de *blob*, des objets dont la position, la forme et la densité varie au cours du temps.

Nous avons choisi d'utiliser dans notre méthode une grille de voxels, que nous appelons grille géométrique, car elle décrit la géométrie du milieu. Bien que coûteuse en mémoire, cette structure offre à la fois une grande liberté dans le choix du modèle de milieu participant et un accès très rapide aux informations nécessaires à la simulation. De plus, la progression des photons dans une grille de ce type est très rapide grâce à l'utilisation d'algorithmes incrémentaux. Nous avons considéré des milieux de densités hétérogènes, mais de composition homogène. Les caractéristiques des particules composant le milieu sont constantes, seule leur densité varie. Nous n'avons donc besoin que de la densité du milieu en chaque point. En utilisant la densité relative, ces valeurs sont comprises entre 0 et 1 et peuvent être économiquement représentées sur un octet. Sous ces conditions, l'occupation mémoire d'une telle grille devient raisonnable (256 Ko pour une grille cubique de 64 voxels de coté).

2.5.2 Stockage des énergies et des luminances

A chaque fois qu'un photon subit une diffusion, il faut pouvoir stocker la direction et l'énergie incidente au point de diffusion. En fin de simulation, toutes les énergies incidentes sont converties en luminances diffusées. La visualisation du milieu peut être ainsi effectuée. Ces deux grandeurs, énergie incidente et luminance, étant directionnelles, nous devons stocker à la fois leur intensité et leur direction. Plusieurs solutions ont été proposées pour discrétiser l'espace des directions. Dans [ICG86], les auteurs utilisent un cube, appelé *cube global*, centré sur le point d'interaction et dont les faces sont divisées en pixels carrés. Une valeur de luminance est stockée pour chaque pixel. Cet échantillonnage régulier du cube est aussi utilisé pour éliminer les faces cachées par un algorithme de z-buffer. Lorsqu'un z-buffer n'esr pas nécessaire, ce cube global peut être avantageusement remplacé par une sphère dont la surface est échantillonnée en facettes. Ceci diminue les problèmes d'aliasing, inhérents à tout processus d'échantillonnage et donne donc de meilleurs résultats. la discrétisation angulaire peut se faire de plusieurs façons, en découpant la sphère en méridiens et parallèles [LS92] ou en l'approchant récursivement par un ensemble de triangles quasi-égaux [Lan94] [Ren84]. On trouve une dernière méthode d'échantillonnage, présentée dans [SAWG91], fondée sur les harmoniques sphériques. Une fonction définie sur la sphère est approximée par une somme pondérée d'harmoniques sphériques. Le nombre de termes détermine la précision de l'échantillonnage des directions. Cette approche élimine aussi les problèmes d'aliasing cités plus haut, mais est plus complexe et plus coûteuse à mettre en oeuvre que les approches précédemment citées.

A chaque diffusion, nous devons mettre à jour la structure de stockage au point d'interaction. Le nombre de diffusion étant important, cette opération de mise à jour doit être rapide. Nous avons choisi d'utiliser des sphères échantillonnées en méridiens et parallèles, car elles répondent à ce critère de rapidité tout en garantissant la bonne qualité de l'échantillonnage. Comme nous n'avons pas d'information à priori sur la direction d'incidence des photons, l'échantillonnage est régulier suivant les directions de l'espace : aucune direction particulière n'est privilégiée. L'angle solide de chaque échantillon est donc constant. Aussi, la sphère est échantillonnée de manière à ce que la surface de chaque facette définie par deux méridiens successifs et deux parallèles successifs soit constante.

Si la sphère est échantillonnée avec M méridiens et N parallèles (chaque pôle de la sphère compte pour un parallèle), on obtient $Q = M*(N-1)$ échantillons. Une base orthonormée $(P, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est associée à chaque sphère centrée sur un point P. En coordonnées sphériques dans ce repère, la position d'un méridien est donnée par l'angle azimutal ϕ et celle d'un parallèle par l'angle polaire θ. Il faut trouver deux ensembles d'angles ϕ_i, $\forall i \in [0, M-1]$ et θ_j $\forall j \in [0, N-1]$, tels que la surface S de chaque facette soit égale à la surface de la sphère divisée par le nombre de facettes (Figure 2.5).

$$S = \frac{4\pi}{Q} \tag{2.22}$$

Les méridiens sont symétriquement disposés autour du vecteur $\vec{k}$. Nous avons donc :

$$\phi_i = \frac{2\pi}{M} \quad \forall i \in [0, M-1] \tag{2.23}$$

La surface S entre deux parallèles successifs doit être constante. Comme N parallèles définissent $N-1$ bandes de M facettes, elle doit valoir :

$$S = M\frac{4\pi}{Q} = \frac{4\pi}{N-1} \tag{2.24}$$

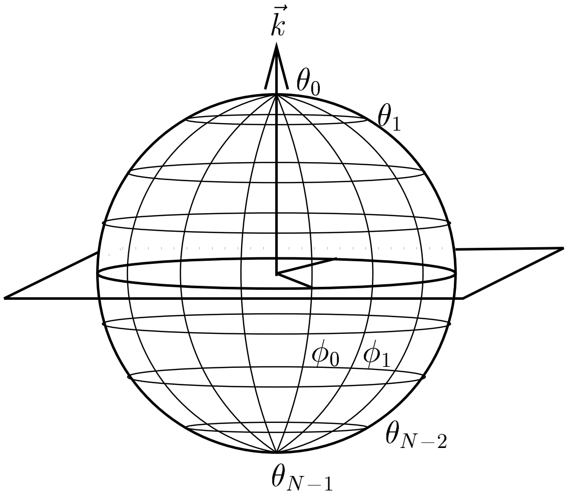


Figure 2.5 : Sphère de stockage

La surface entre deux parallèles d'angles θ_i et θ_{i+1}, avec θ_i ¡ θ_{i+1}, est donnée par :

$$S = \int_{\theta_i+1}^{\theta_i} 2\pi \sin\theta d\theta = 2\pi(\cos\theta_i - \cos\theta_{i+1}) \tag{2.25}$$

Nous obtenons une suite arithmétique avec $\cos\theta_{i+1} = \cos\theta_i - \frac{2i}{N-1}$ et $\cos\theta_0 = 1$, d'où :

$$\cos\theta_i = 1 - \frac{2i}{N-1} \forall i \in [0, N-1] \tag{2.26}$$

Le nombre d'échantillons dépend de l'aspect directionnel de la fonction de phase du milieu : il doit être d'autant plus important que cette fonction est spéculaire. Au contraire, dans le cas de fonction de phase isotropes, un seul échantillon suffit. En effet, la luminance est constante dans toutes les directions. Nous n'avons plus besoin d'informations concernant les directions. Pattanaik et al [PM93a] se sont limités dans la pratique à ce type de diffusion.

2.5.3 Méthode volumique

2.5.3.1 Description

Cette méthode est dite volumique car nous stockons l'énergie et la luminance diffusée par le milieu participant à l'intérieur de celui-ci. Comme pour les densités, nous utilisons une grille 3D de voxels. Elle contient la description de l'illumination du milieu. Par analogie à la grille géométrique, nous l'appelons grille optique. La définition de cette grille conditionne la qualité de l'échantillonnage des luminances, mais aussi le coût en mémoire de la méthode. Plus elle est fine, plus l'échantillonnage est précis, mais plus la place mémoire occupée est importante. Mais, contrairement à la densité qui se code sur un octet, chaque sphère de stockage occupe une place importante en mémoire : il faut utiliser un nombre flottant par longueur d'onde et par direction échantillonnée. Dès que la description géométrique du milieu est fine, il n'est pas possible d'associer à chaque voxel géométrique, un voxel optique. Les définitions des deux grilles doivent donc être indépendantes. Lorsque la grille optique est plus grossière que la grille géométrique, il est nécessaire d'utiliser une technique particulière, inspirée des techniques de texture solide [Pea85][PH89], pour conserver les détails géométriques du milieu pour une illumination correcte.

La méthode comprend deux passes : une passe d'illumination du milieu participant et une passe de visualisation. La première passe est indépendante de la position de l'observateur. Durant celle-ci, nous effectuons la simulation décrite dans la première partie de ce chapitre. Les sources lumineuses émettent des photons porteurs d'énergie. Lorsqu'un photon pénètre dans le milieu, il y progresse incrémentalement jusqu'à être, soit totalement absorbé, soit à l'extérieur du milieu. A chaque pas, une diffusion peut avoir lieu en fonction de la probabilité d'interaction. Dans ce cas, l'énergie du photon diffusé et sa direction d'incidence sont stockés dans la sphère de échantillonnée associée au volume où a eu lieu la diffusion. Comme les définitions des grilles optiques et géométrique sont indépendantes, une même sphère peut être associée à plusieurs voxels géométriques voisins. Le photon continue ensuite sa progression avec une nouvelle direction choisie aléatoirement selon la fonction de phase des particules du milieu.

A la fin de cette passe, les énergies stockées dans le milieu sont converties sous une forme adaptée à la visualisation : l'énergie incidente de chaque sphère est transformée en luminance diffusée. Nous effectuons ensuite un lissage de la luminance du milieu ainsi que ses densités en les répartissant aux sommets de leur voxels respectifs.

La seconde passe est dépendante de l'observateur. Des rayons de visualisation sont émis depuis le point d'observation à travers les pixels de l'écran virtuel vers la scène. Lorsqu'un rayon pénètre dans le milieu, il progresse incrémentalement en ligne droite en cumulant les luminances du milieu présentes sur sa trajectoire. Ces luminances sont atténuées durant la traversée du milieu.

2.5.3.2 Conversion de l'énergie incidente en luminance diffusée

Au cour de la simulation, nous avons stocké, dans la sphère de chaque voxel optique, la quantité d'énergie diffusée ainsi que sa direction d'incidence. Cependant, l'oeil étant sensible à la luminance et non à l'énergie, nous devons convertir chaque énergie incidente en luminance diffusée dans toutes les directions. Pour les objets solides classiques, le rayon de visualisation capture simplement la luminance présente à la surface. Mais pour les milieux participants, ce rayon progresse à l'intérieur en cumulant la luminance présente en chaque point de sa trajectoire. La luminance du milieu participant est donc exprimée par unité de longueur et non pas par unité de surface projetée.

En étendant à la diffusion non isotrope l'expression donnée dans [SH81], la luminance $dL(V)$ quittant un volume différentiel dC dans une direction V pour une énergie incidente diffusée $dE(V')$ de direction V' est donnée par :

$$dL(V) = \frac{dE(V')\varphi(V,V')}{4\pi dA} \tag{2.27}$$

où dA est l'aire de la projection du volume différentiel dC suivant la direction V. Si dC est un cube de coté dP avec deux faces perpendiculaires à V, alors $dA = dP^2$. De plus, si ce voxel dC est contenu dans un voxel C, de volume Vol_c, contenant une énergie incidente E(V') de direction V', constante sur le voxel, alors $dE(V') = E(V')\frac{dP^3}{Vol_C}$. L'expression de la luminance devient :

$$\begin{aligned} dL(V) &= E(V')\frac{dP^3}{Vol_C}\frac{\varphi(V,V')}{4\pi dP^2} \\ &= \frac{E(V')}{4\pi Vol_C}\varphi(V,V')dP \end{aligned}$$

La luminance diffusée par unité de longueur $L(V)$ dans une direction V en fonction d'une énergie $E(V')$ de direction incidente V' est donc :

$$L(V) = \frac{E(V')}{4\pi Vol_C}\varphi(V,V') \tag{2.28}$$

Le volume Vol_C est le volume de milieu participant contenu dans le voxel optique de volume Vol_V. Si celui-ci ne contient que le milieu participant, alors $Vol_C = Vol_V$. Par contre, s'il contient un objet solide de volume occupant un volume Vol_O dans le voxel, le volume de milieu participant est $Vol_C = Vol_V - Vol_O$.

Afin d'obtenir une description continue de la luminance en fonction de la direction, les échantillons pour les luminances sont placés non plus au centre des facettes de la sphère, mais aux intersections des méridiens, et des parallèles, sommets des facettes. La luminance émise dans une direction V est calculée par interpolation bi-linéaire à partir des sommets de la facette à laquelle appartient V.

L'algorithme de la conversion pour une voxel optique de l'énergie incidente en luminance diffusée est le suivant :

> Initialiser à zéro tous les échantillons de la sphère des luminances diffusées.
> Pour toutes les directions échantillonnées V' de la sphère des énergies incidentes,
> Faire :
>> $E(V') = \frac{E(V')}{4\pi Vol_C}$
>> Pour toutes les directions échantillonnée V de la sphère des luminances diffusées,
>> Faire :
>>> $L(V) = L(V) + \varphi(V,V')E(V')$

2.5.3.3 Lissage du milieu participant

Les valeurs caractérisant le milieu participant (densité et luminance) sont constantes dans un voxel. Ceci provoque des artefacts visibles lors de la visualisation du milieu. Il faut donc lisser ces valeurs pour obtenir une description continue du milieu : nous calculons la valeur pour chaque sommet de la grille en répartissant les valeurs au centre des voxels voisins. Une fois ce calcul effectué, la valeur d'un point P appartenant à un voxel V est calculée par interpolation tri-linéaires des valeurs des sommets du voxel. Notre méthode de répartition est issue de la méthode proposée pour les surfaces dans [CG85], étendue à la troisième dimension.

Si un sommet est à l'intérieur du milieu, sa valeur est la moyenne des valeurs des huit voxels qui partagent ce sommet :

$$Val_{centre} = \sum_{i=1}^{8} Val_{Voxel_i}/8 \tag{2.29}$$

S'il est situé sur un bord extérieur de la grille de voxels, sa moyenne avec la valeur du sommet intérieur le plus proche doit valoir la moyenne des valeurs des voxels qui se partage ce sommet :

$$\frac{Val_{extérieur} + Val_{centre}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Val_{Voxel_i}}{n} \tag{2.30}$$

Nous obtenons :

$$Val_{extérieur} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} Val_{Voxel_i}}{n} - Val_{centre} \tag{2.31}$$

Un sommet situé sur une face extérieure de la grille de voxels est partagé par quatre voxels. Donc :

$$Val_{face} = \frac{\sum_{i=1}^{2} Val_{Voxel_i}}{2} - Val_{centre} \tag{2.32}$$

Un sommet situé sur une arête extérieure est partagé par deux voxels :

$$Val_{arête} = \left(\sum_{i=1}^{2} Val_{Voxel_i}\right) - Val_{centre} \tag{2.33}$$

Enfin les sommets situés dans les coins de la grille appartiennent à un seul voxel :

$$Val_{coin} = 2Val_{Voxel_1} - Val_{centre} \tag{2.34}$$

La place mémoire occupée par ces grilles peut être très grande, en particulier celle de la grille optique. Plutôt que créer deux grilles, une de voxel, non lissée, et une de sommets, lissée, il est plus judicieux de transformer la grille de voxels par la grille de sommets. Si la définition de la grille de voxels est (M, N, P), alors celle de la grille de sommets sera de $(M+1, N+1, P+1)$. En donnant dès le départ cette définition à la grille de voxels, nous pouvons effectuer le lissage à l'intérieur, sans allouer de mémoire supplémentaire.

2.5.3.4 Passe de visualisation

Durant cette passe, les rayons de visualisation sont lancés depuis l'observateur à travers les pixels de l'image. Lorsqu'un rayon pénètre dans un milieu participant, il le traverse incrémentalement en cumulant les luminances diffusées dans sa direction par tous les points de sa trajectoire. Ces luminances sont diminuées par la transmittance du milieu. En quittant le milieu, il continue sa progression dans la scène pour recueillir la luminance provenant de derrière. Cette luminance est elle aussi atténuée par la transmittance du milieu sur la trajectoire du rayon.

La luminance L_{obs} perçue par l'observateur a donc deux composantes : la luminance L_{milieu} provenant de la traversée du milieu participant et la luminance L_{fond} provenant des objets situés derrière le milieu : $L_{obs} = L_{milieu} + L_{fond}$.

La luminance L_{milieu} est donnée par :

$$L_{milieu} = \int_{P_{entrée}}^{P_{sortie}} L(P) e^{-\int_{P_{entrée}}^{P} k(P')dP'} dP \tag{2.35}$$

où $P_{entrée}$ est le point d'entrée dans le milieu et P_{sortie}, le point de sortie. Les phénomènes de diffusion et de d'absorption ne sont plus séparés. Nous utilisons donc la loi de Bouguer dans son entièreté avec le coefficient d'extinction k_t.

Nous échantillonnons, sur la trajectoire du rayon, $n+1$ points P_0, P_1, $\ldots$, P_n ($P_0 = P_{entrée}$, $P_n = P_{sortie}$). Ces points définissent n segments. $[P_0P_1]$, $[P_1P_2]$, $\ldots$, $[P_{n-1}P_n]$. Nous calculons L_{milieu} en cumulant la contribution de chaque segment $[P_iP_{i+1}]$, pondérée par la transmittance du milieu depuis le point P_0 au point P_i.

$$L_{milieu} = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sum_{j=0}^{i-1} \int_{P_j}^{P_{j+1}} k_t(P')dP'} \int_{P_i}^{P_{i+1}} L(P) e^{-\int_{P_i}^{P} k_t(P')dP'} dP \tag{2.36}$$

Le milieu étant lissé, sa densité et de sa luminance sont décrites de manière continue. Ces valeurs sont considérées variant linéairement suivant la distance sur un segment $[P_iP_{i+1}]$. Le coefficient d'extinction ne dépend que de la densité, donc pour un point P de l'intervalle $[P_iP_{i+1}]$, nous avons :

$$\begin{aligned} L(P) &= L(P_i) + (L(P_{i+1}) - L(P_i)) \frac{P - P_i}{P_{i+1} - P_i} && (2.37) \\ k(P) &= k\left(\rho(P_i) + (\rho(P_{i+1}) - \rho(P_i)) \frac{P - P_i}{P_{i+1} - P_i}\right) && (2.38) \end{aligned}$$

d'où, en posant $L_{cumulée}$, la luminance cumulée et atténuée sur le segment $[P_iP_{i+1}]$ et $T(P_j, P_{j+1})$, la transmittance du segment $[P_jP_{j+1}]$,

$$L_{milieu} = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0}^{i-1} T(P_j, P_{j+1}) \right) L_{cumulée}(P_i, P_{i+1}) \tag{2.39}$$

$$L_{cumul\acute{e}e}(P_i,P_{i+1}) = \int_{P_i}^{P_{i+1}} \left(L(P_i) + (L(P_{i+1}) - L(P_i)) \frac{P-P_i}{P_{i+1}-P_i} \right) T(P_i,P)dP \tag{2.40}$$

$$\forall P \in [P_i,P_{i+1}] \quad T(P_i,P) = e^{-k\int_{P_i}^{P} \rho(P_i)+(\rho(P_{i+1})-\rho(P_i))\frac{P'-P_i}{P_{i+1}-P_i}dP'}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}k\frac{\rho(P_{i+1})(P-P_i)^2+\rho(P_i)(2PP_{i+1}-2P_iP_{i+1}-P^2)}{P-P_i}} \tag{2.41}$$
$$T(P_j,P_{j+1}) = e^{-\frac{1}{2}k(\rho(P_j)+\rho(P_{j+1}))(P_{j+1}-P_j)} \tag{2.42}$$

où $L_{cumul\acute{e}e}$ est la luminance cumulée et atténuée sur le segment $[P_iP_{i+1}]$ et $T(P_j,P_{j+1})$ la transmittance du segment $[P_jP_{j+1}]$.

La fonction exprimant la luminance cumulée $L_{cumul\acute{e}e}(P_i,P_{i+1})$ n'a pas d'expression analytique. Il est donc nécessaire de faire une hypothèse simplificatrice pour la calculer : la densité entre P_i et P_{i+1} est supposée constante. C'est la moyenne entre $\rho(P_i)$ et $\rho(P_{i+1})$. Cette hypothèse ne modifie pas la transmittance sur le segment $[P_i,P_{i+1}]$. L'expression de $L_{cumul\acute{e}e}(P_i,P_{i+1})$ est maintenant :

$$L_{cumul\acute{e}e}(P_i,P_{i+1}) = \int_{P_i}^{P_{i+1}} \left(L(P_i) + (L(P_{i+1}) - L(P_i)) \frac{P-P_i}{P_{i+1}-P_i} \right) T(P_i,P)dP$$
$$= 2\frac{L(P_{i+1})-L(P_i)}{k(\rho(P_i)+\rho(P_{i+1}))} \left(2\frac{T(P_i,P_{i+1})-1}{k(\rho(P_i)+\rho(P_{i+1}))(P_{i+1}-P_i)} + T(P_i,P_{i+1}) \right)$$
$$T(P_i,X) = e^{-\frac{1}{2}k(\rho(P_i)+\rho(P_{i+1}))(X-P_i)}$$

La luminance L_{fond} vaut quant à elle :

$$L_{fond} = \prod_{i=0}^{n-1} T(P_i,P_{i+1}) L_{objet\ touch\acute{e}} \tag{2.43}$$

où $L_{objet\ touch\acute{e}}$ est la luminance de l'objet intersecté par le rayon de visualisation.

L'échantillonnage et l'anti-aliasing de la trajectoire d'un rayon dans un milieu participant a été étudié par Sakas et al [HS90] [SG91]. Ils proposent deux techniques d'échantillonnage donnant de très bons résultats : l'échantillonnage de distance et l'échantillonnage de volume. Le second est meilleur du point de vue de l'aliasing, mais est une technique lente et complexe à mettre en oeuvre. Le milieu participant étant lissé, nous pouvons nous contenter de l'échantillonnage de distance tout en conservant la qualité de rendu. Nous effectuons cet échantillonnage en progressant incrémentalement de voxel optique en voxel optique à l'aide du classique algorithme 3D de Bresenham [Coh94]. Ainsi tous les voxels de la trajectoire sont pris en compte. Les points d'échantillonnage se situent tous sur les faces des voxels. Ceci permet de calculer leur valeur par interpolation bi-linéaire et non tri-linéaire. La contribution d'un voxel à la luminance perçue par l'observateur est proportionnelle à la distance parcourue par le rayon dans le voxel. Il faut cependant remarquer que l'hypothèse selon laquelle les valeurs du milieu varient linéairement entre deux points P_i et P_{i+1} n'est exacte que si les deux points appartiennent au même voxel et si le rayon de visualisation est orthogonal à une des faces du voxel. La première condition est toujours vérifiée, mais la seconde l'est rarement. Une erreur est introduite dans

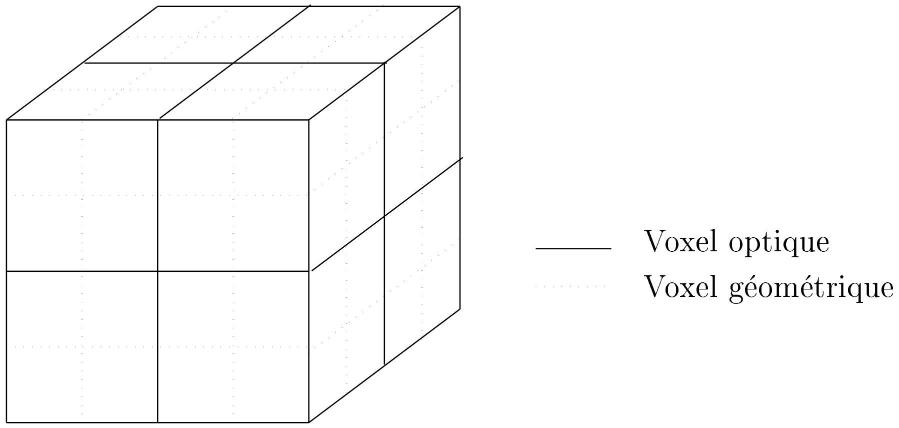


Figure 2.6 :

la visualisation du milieu. Cette erreur est en général négligeable, mais elle peut devenir problématique lorsque les valeurs aux sommets des voxels présentent de fortes variations et que la longueur du segment $[P_i, P_{i+1}]$ est grande. Des défauts dans l'image apparaissent, rendant visibles les faces des voxels. Pour résoudre ce problème, il est alors nécessaire de subdiviser le segment pour effectuer un échantillonnage plus fin de la trajectoire.

2.5.3.5 Conservation des détails géométriques

Dans un milieu de caractéristiques optiques homogènes, la quantité de lumière diffusée dépend uniquement de sa densité (Equation 1.39) : plus la densité est grande, plus la quantité de lumière est importante. Pour obtenir un échantillonnage correct de l'illumination du milieu, la résolution de la grille optique doit être au minimum celle de la grille géométrique. Dans notre implémentation, si le stockage de la grille géométrique est peu coûteux en mémoire, celui de la grille optique l'est beaucoup plus. Chaque sphère de stockage contient un nombre d'échantillons égal au nombre de directions échantillonnées multiplié par le nombre de longueurs d'onde (si chaque échantillon est codé par un nombre flottant de quatre octets, un voxel optique dont la sphère comprend 64 directions et 4 longueurs d'onde occupe un kilo-octet, soit plus de mille fois l'occupation mémoire d'un voxel géométrique).

Il nous faut donc pouvoir utiliser une grille optique de résolution inférieure à celle de la grille géométrique : un voxel optique peut contenir plusieurs voxels géométriques (Figure 2.6). Ceci a pour conséquence une perte de précision dans l'illumination, mais surtout une perte des détails géométriques. L'illumination d'un ensemble de voxels géométriques est moyennée sur le voxel optique. En fonction de leur densité, certains voxels géométriques seront plus lumineux, donnant l'impression d'être plus dense qu'ils ne le sont réellement. D'autres seront, au contraire, moins lumineux et paraîtrons moins denses (Figure 2.8). Pour conserver les détails géométriques du milieu, il faut pouvoir calculer la valeur correcte de l'illumination d'un voxel géométrique à partir de l'illumination du voxel optique

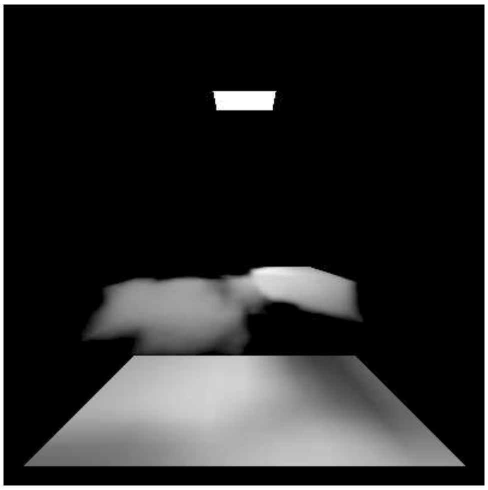


Figure 2.7 : Grille géométrique 65x10x65 et Grille optique 65x10x65

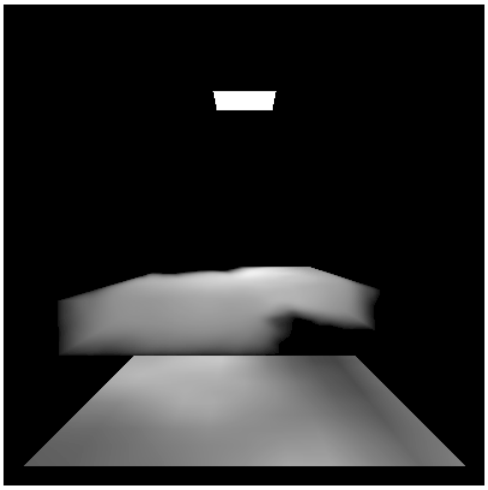


Figure 2.8 : Grille géométrique 65x10x65 et Grille optique 13x2x13 sans détail

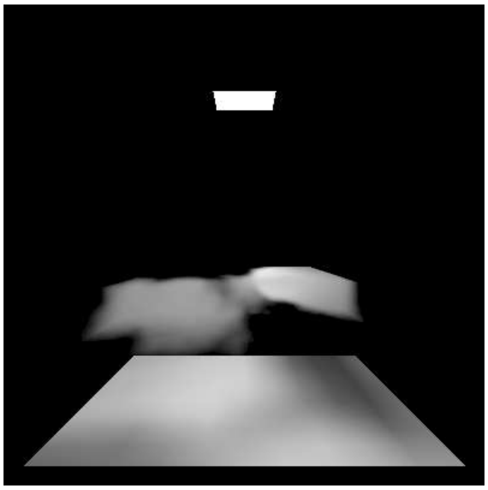


Figure 2.9 : Grille géométrique 65x10x65 et Grille optique 13x2x13 avec détail

l'englobant.

Si nous considérons une énergie incidente E_i sur un voxel géométrique cubique, de coté l, de densité ρ et de coefficient de diffusion σ, alors d'après la loi de Bouguer, l'énergie diffusée par ce voxel est

$$E_d = E_i * (1 - e^{l\rho\sigma}) \tag{2.44}$$

L'énergie diffusée $E_{optique}$ stockée dans un voxel optique contenant un nombre entier n de voxels géométriques est la somme des énergies diffusées par chacun de ces voxels :

$$E_{optique} = \sum_{j=1}^{n} E_{d_j} \tag{2.45}$$

En supposant que l'énergie incidente à chaque voxel géométrique est constante, nous avons :

$$E_{optique} = E_i \sum_{j=1}^{n} (1 - e^{l\rho_j\sigma}) \tag{2.46}$$

L'énergie incidente à chaque voxel géométrique peut donc être calculée à partir de l'énergie diffusée $E_{optique}$ stockée dans le voxel optique :

$$E_i = \frac{E_{optique}}{\sum_{j=1}^{n} (1 - e^{l\rho_j\sigma})} \tag{2.47}$$

L'énergie diffusée par chaque voxel géométrique du voxel optique peut donc être calculée en utilisant l'équation 2.44.

Lors de la conversion de l'énergie incidente en luminance, c'est cette énergie E_i que nous convertissons et que nous stockons dans le voxel optique. Lors de la phase de visualisation, la luminance diffusée par un point du milieu de densité ρ est calculée en multipliant la luminance du voxel optique par $1 - e^{l\rho\sigma}$ (Figure 2.9). La progression se fait maintenant de voxel géométrique en voxel géométrique.

2.5.4 Méthode surfacique

Nous définissons la surface d'un milieu participant comme l'ensemble des voxels qui ont pour voisin au moins un voxel de densité nulle et un voxel de densité non nulle.

Le stockage de l'illumination du milieu dans une grille tri-dimensionnelle occupe beaucoup de place mémoire. Il existe des milieux pratiquement opaques, comme les nuages très denses. Seule la surface en est visible. Il n'est donc pas utile de stocker la luminance diffusée à l'intérieur du milieu, celle-ci n'étant pas visible à sa surface. Nous proposons donc de stocker la luminance quittant le milieu à sa surface [BLS94a], comme pour un objet solide. Ce stockage n'est pas plus coûteux que pour les objets surfaciques et a l'avantage de réduire le nombre d'accès à la structure de donnée. Nous associons à chaque voxel de la surface une sphère de stockage.

L'algorithme d'illumination du milieu est identique à celui de la méthode volumique. Seul le stockage change : au lieu de stocker l'énergie diffusée à l'intérieur du milieu, nous stockons, dans les voxels de la surface, l'énergie qui quitte le milieu participant après avoir subit au moins une diffusion. A la fin de cette phase, l'énergie stockée est convertie en luminance par unité de volume, et nous appliquons l'algorithme de lissage précédemment décrit au voxels de la surface.

Lors de la phase de visualisation, les rayons de visualisation récupèrent la luminance présente dans les voxels de la surface, puis progressent incrémentalement dans le milieu pour calculer l'atténuation à appliquer à la luminance provenant des objets situés derrière le milieu. Cette progression demande beaucoup moins de calcul : il est inutile de calculer la luminance présente sur le trajet du rayon.

Cette méthode est très proche des méthodes proposées dans [BRB93] [BMG94] : un photon ne contribue à l'illumination que d'une seule direction dans un seul voxel. Elle présente par conséquent une variance importante et il est nécessaire de lancer un nombre beaucoup plus important de photons pour obtenir un résultat correct. De plus, nous ne pouvons plus placer l'observateur à l'intérieur du milieu. Elle est donc limitée au rendu de milieux opaques visualisés de l'extérieur, comme les nuages.

2.6 Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre une simulation de Monte Carlo de notre modèle particulaire de la lumière dans un milieu participant. Le transport de plusieurs longueurs d'ondes par un photon et la probabilité moyenne d'interception permettent de lancer beaucoup moins de photons dans le milieu participant. Nous avons dérivé de cette probabilité moyenne une technique permettant de réduire la variance de la simulation en cas de sous-échantillonnage des points de diffusion. Cette variance est également réduite par un calcul exact de l'absorption du milieu. Une structure de stockage des luminances a été décrite, permettant de conserver les détail géométriques du milieu participant même si la résolution de cette structure est faible.

Nous avons défini à partir de cette simulation deux méthodes, l'une volumique et l'autre surfacique. La méthode volumique est utilisable pour tous les types de milieux participant. Elle permet de placer l'observateur à l'intérieur du milieu participant. Elle est particulièrement adaptée aux scènes d'intérieur en présence d'une atmosphère participante. Cependant, elle demande une place mémoire assez importante. La méthode surfacique est beaucoup plus économique en mémoire, mais son utilisation est limitée aux milieux fortement participant, comme les nuages. Il n'est pas possible de placer l'observateur à l'intérieur du milieu. Cette méthode est plus adaptée aux scènes d'extérieur, quand on désire visualiser de loin un milieu participant opaque. Cependant, sa variance est beaucoup plus élevée que celle de la méthode surfacique.

Chapitre 3

Extension à un modèle complet d'illumination

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle complet d'illumination de scène, comprenant à la fois des objets surfaciques et des milieux participants. La simulation décrite au chapitre précédant est étendue aux objets modélisés par leur surface [BLS94a]. En plus des phénomènes d'absorption et de diffusion de la lumière par les milieux participants, Le processus stochastique doit, non seulement simuler les phénomènes d'absorption et de diffusion de la lumière par les milieux participants, mais aussi simuler l'émission, l'absorption et la réflexion des photons par les surfaces de la scène. Si la détermination des points d'interaction photon-matière est beaucoup plus simple, la modélisation de la réflexion pose plus de problèmes que celle de la diffusion.

De nombreuses méthodes de Monte-Carlo ont été proposées pour résoudre les équations de rendu pour des scènes comportant des objets surfaciques, mais pas de milieux participants. La majorité d'entre elles sont des méthodes d'intégration de Monte-Carlo [CPC84] [LRU85] [Kaj86] [SW92b], appelées généralement *lancer de rayon de Monte Carlo* ou *lancer de rayon distribué*. Elles évaluent les équations de rendu grâce à une marche aléatoire débutant au point d'échantillonnage du pixel dans la direction de visualisation de la scène. Mais ces méthodes souffrent d'une convergence lente. Il est nécessaire de lancer de nombreux rayons (plusieurs centaines) à travers chaque pixel pour diminuer la variance du résultat et obtenir une image peu bruitée. Diverses techniques ont été proposées par la suite pour diminuer cette variance et améliorer la convergence de ces méthodes. [Shi90] [LRU85] [SW91] [LW94].

Les méthodes de simulation sont quant à elles plus récentes. Elles ont été introduites pour la première fois en synthèse d'images dans [AK90] et [Shi90]. Ces méthodes effectuent une simulation d'un modèle particulaire de la lumière en émettant des photons depuis les sources lumineuses et en simulant leurs interactions avec les surfaces de la scène. Dans [PM92], les auteurs font une description détaillée de cette méthode qu'ils ont par la suite étendue aux milieux participants dans [PM93a]. Cette simulation a été formalisée dans [Pat93] [Pat90] [PM93b] comme une évaluation par une quadrature de Monte Carlo des équations de potentiel, équations adjointes des équations de rendu. Des méthodes mixtes combinant deux marches aléatoires, l'une à partir de l'oeil et l'autre à partir d'une source lumineuse, ont aussi été proposées [VG94][Laf96].

La section 3.1 de ce chapitre décrit l'algorithme général de la simulation, sans optimisations telles que la suppression de l'absorption ou la roulette russe. Dans la section 3.2, une nouvelle méthode est présentée : le regroupement de photons. Cette méthode est une alternative à la suppression de l'absorption et à la roulette russe. La section 3.3 détaille la version finale de la simulation, intégrant le regroupement de photons. Finalement, la section 3.4 présente les choix d'implémentation.

3.1 Un algorithme général de simulation

L'introduction de surfaces dans la scène modifie peu la simulation décrite au chapitre précédent. Les photons issus des sources effectuent une marche aléatoire dans la scène, débutant aux sources lumineuses et interagissant avec les objets présents dans la scène. Ils peuvent être, diffusés ou absorbés à l'intérieur d'un milieu participant et, réfléchi, transmis ou absorbés par la surface d'un objet. La marche aléatoire d'un photon se termine lorsque le photon est absorbé ou lorsqu'il quitte la scène.

Seule la fonction de transition T de la marche aléatoire est modifiée. Elle se décompose en deux fonctions de transitions, T_{volume} dans les milieux participants et $T_{surface}$ sur les surfaces. La fonction T_{volume} est la fonction de transition décrite au chapitre précédent. La fonction $T_{surface}$ est une composition de :

- la probabilité ξ du type d'interaction. Cette fonction de densité de probabilité est une fonction discrète définie à partir des coefficients de réflexion ρ_r, de transmission ρ_t et d'absorption ρ_a de la surface où

$$\rho_r = \int_{V_r \in \mathcal{V}} R(P, V_i, V_r) cos\theta_r dV_r \tag{3.1}$$

$$\rho_t = \int_{V_t \in \mathcal{V}} T(P, V_i, V_t) cos\theta_t dV_t \tag{3.2}$$

$$\rho_a = 1 - (\rho_r + \rho_t) \tag{3.3}$$

- selon le type d'interaction, la probabilité de réflexion/transmission dans une direction. La fonction de densité de probabilité f_r associée à la réflexion dépend de la fonction de réflectance bi-directionnelle de la surface. Comme les photons sont porteurs d'énergie et non de luminance, la FDRB est multipliée par le facteur géométrique $\cos\theta_r$ où θ_r est l'angle entre le normale de la surface et la direction de réflexion V_r.

$$f_r(P, V_i, V_r) = \frac{R(P, V_i, V_r) \cos\theta_r}{\rho_r} \tag{3.4}$$

De même, la fonction de densité de probabilité f_t pour la transmission est :

$$f_t(P, V_i, V_t) = \frac{T(P, V_i, V_t)\cos\theta_t}{\rho_t} \tag{3.5}$$

Nous pouvons combiner ces deux fonctions pour obtenir une unique fonction de réémission f. Nous n'avons alors plus que deux types d'interactions, l'absorption ou la réémission.

$$f_{rt}(P, V_i, V) = \frac{\rho_r}{\rho_r + \rho_t} f_r(P, V_i, V) + \frac{\rho_t}{\rho_r + \rho_t} f_t(P, V_i, V) \tag{3.6}$$

L'algorithme de la simulation devient :

```
Tant qu'il reste de l'énergie à émettre :
    Choisir un pas de départ.
    Mettre à jour le flux émis par la source lumineuse choisie.
    Répéter jusqu'à ce que le photon soit absorbé ou qu'il quitte la scène :
        Choisir le point d'interaction.
        Si ce point est dans le milieu participant alors
            Choisir le type d'interaction.
            Si l'interaction est une diffusion alors
                Mettre à jour le flux émis par ce point du milieu participant.
                Choisir une direction de diffusion.
            Sinon
                Absorber le photon.
        Sinon Si ce point est sur une surface, alors
            Choisir le type d'interaction.
            Si l'interaction est une réémission, alors
                Mettre à jour le flux réémis par ce point de la surface.
                Choisir une direction de réémission.
            Sinon
                Absorber le photon.
    Jusqu'à ce que le photon soit absorbé ou qu'il quitte la scène.
```

La méthode de suppression de l'absorption [LJ84] est applicable aux surfaces pour diminuer la variance de la simulation : lorsqu'un photon touche une surface avec une énergie q, il est réfléchi ou transmis avec une énergie $q(\rho_r + \rho_t)$. La marche aléatoire du photon étant plus longue, celui-ci contribue à l'illumination de plus de points de la scène. La terminaison de la marche aléatoire du photon est déterminée par la technique de la roulette russe. Cette méthode présente cependant des inconvénients. Au fil des réflexions/transmissions, le photon est porteur de moins en moins d'énergie et sa contribution à l'illumination de la scène est donc de moins en moins importante. Cependant, le coût de calcul pour chaque pas est constant. Par conséquent, le rapport *contribution à l'illumination / coût de calcul* est plus faible pour les derniers pas de la marche aléatoire que pour les premiers. Nous appelons ce rapport *efficacité d'un pas*. De plus, la technique de la roulette russe augmente la variance de la simulation en interrompant aléatoirement la marche de certains photons et en augmentant l'énergie portée par d'autres.

3.2 Regroupement de photons : les paquets

Nous proposons une méthode, appelée regroupement de photons, ne comportant pas les inconvénients cités au paragraphe précédant. L'objectif de la méthode est de préserver une efficacité constante à chaque pas de calcul de la simulation. Tous les photons doivent porter à chaque pas un même quantum d'énergie q, paramètre de la simulation. La méthode doit aussi conserver la diminution de la variance obtenue grâce à un calcul exact de l'absorption. Cette méthode est une généralisation aux objets non diffus de la simulation d'absorption et de réémission proposé par Shirley dans [Shi90]. Nous la décrivons ici pour les objets surfaciques, mais elle est également applicable aux objets volumiques.

Le principe de la méthode est de regrouper les photons incidents à une surface S en *paquets de photons*. Chaque paquet de photons est décrit par une fonction de réémission $e(V)$ et une zone d'influence δS sur la surface S. La fonction de réémission $e(V)$ définit pour toute direction V de la sphère la quantité d'énergie émise par la surface. Elle se compose d'un compteur E d'énergie à réémettre et d'une fonction f de distribution directionnelle de cette énergie :

$$e(V) = Ef(V) \tag{3.7}$$

La zone d'influence δS du paquet définit la surface en dehors de laquelle les photons incidents ne peuvent être regroupés dans ce paquet.

Lorsqu'un photon rencontre une surface, il faut déterminer dans quel paquet il doit être regroupé. En premier lieu, la zone d'influence de ce paquet doit contenir le point d'impact du photon. De plus, sa fonction de distribution f doit être proche de la fonction de réémission f_{rt} du photon (Equation 3.6). Une fois le paquet déterminé, l'énergie portée par le photon est pondérée par l'absorption de la surface, puis ajoutée au compteur E d'énergie à réémettre du paquet.

Lorsque l'énergie d'un paquet est suffisante, celle-ci est émise sous la forme de photons. La direction de chaque photon est déterminée par un échantillonnage de la fonction de réémission. Si un paquet regroupe n photons incidents portant chacun un quantum q, l'énergie qu'il doit émettre est $nq(1-\rho_a)$. Au lieu d'émettre n photons avec une énergie $(1-\rho_a)q$, comme c'est le cas lors de la réémission immédiate, le paquet émet $n(1-\rho_a)$ photons avec une énergie q. Bien sur, ce nombre étant rarement un nombre entier, nous choisissons donc l'entier le plus proche et calculons un quantum q' en conséquence. La position de réémission de chaque photon est déterminée aléatoirement à l'aide d'une fonction de densité de probabilité. Cette fonction peut, comme pour l'échantillonnage des sources lumineuses, correspondre simplement à un échantillonnage uniforme de la surface associée au paquet, comme pour l'échantillonnage des sources lumineuses. Mais, une fonction de densité de probabilité adaptative [DW94][Lep78] peut aussi être utilisée pour prendre en compte la distribution des points d'impacts des photons incidents sur cette surface.

Cette méthode permet de conserver une efficacité constante tout au long de la simulation. Les derniers pas d'une marche aléatoire sont aussi efficaces que les premiers. Elle correspond en fait à un échantillonnage de toutes les sources lumineuses de la scène, qu'elles soient primaires (émission propre) ou secondaires (réémission de la lumière incidente), dont la qualité est proportionnelle à l'énergie de la source. Chaque paquet est une source secondaire avec sa fonction de réémission. Le nombre de photons émis est d'autant plus important que la source lumineuse est énergétiquement importante. Pour un nombre de pas identiques, la simulation effectue un meilleur échantillonnage des sources importantes, et ce, il est vrai, au détriment des sources plus faibles.

Cette méthode limite de plus l'utilisation de la technique de la roulette russe qui, rappelons le, augmente la variance. Dans la plupart des cas, au lieu de tirer aléatoirement la fin de la marche des photons, celle-ci est choisie de façon déterministe. En effet, en fusionnant n photons incidents à un paquet en $n(1-\rho_a)$ photon réémis, nous avons terminé la marche aléatoire de $n\rho_a$ photons. La roulette russe n'est utilisée que pour les derniers photons de la simulation, lorsque l'énergie incidente contenue dans un paquet est en dessous du seuil de la roulette russe. La variance de la méthode est donc plus faible.

L'efficacité de cette méthode est meilleure lorsque elle est utilisée dans une méthode de type radiosité progressive [CCWG88][LS92], dans lesquelles la contribution des sources de plus grande énergie est effectuée en premier. Ceci permet un meilleur regroupement des photons.

En contrepartie, le regroupement de photons nécessite une structure de données plus importante. Il faut stocker chaque paquet avec sa zone d'influence sur la surface et sa fonction de réémission. La précision de la méthode dépend de la qualité de deux échantillonnages :

- l'échantillonnage de la géométrie de la surface. La surface est échantillonnée en sous-surfaces. Plus cet échantillonnage est fin, plus la description de l'énergie incidente à la surface est précise.
- l'échantillonnage de la fonction de réémission de la surface. Comme la fonction de réémission varie généralement suivant de la direction d'incidence, ceci revient à discrétiser les directions de la sphère en classe de directions. Un paquet est associé à chaque classe. Le nombre de paquets dépend de la rapidité de la variation de la fonction de réémission. Si elle varie peu, le nombre de paquets nécessaires est faible. Dans le cas d'une surface parfaitement diffuse, la fonction de réémission est constante et un paquet suffit. A l'opposé, lorsque la fonction d'émission varie rapidement selon la direction incidente, il faut utiliser un grand nombre de paquets. Pour une surface parfaitement spéculaire, une infinité de paquets serait nécessaire. Dans le cas des surfaces parfaitement ou quasi spéculaires, cette méthode n'est donc pas utilisable et il faut réémettre immédiatement les photons incidents selon la fonction de réémission de la surface.

Le regroupement de photons nécessite un compromis entre précision et efficacité. Plus le nombre de paquets est important, plus la précision de la méthode est importante, mais moins le regroupement de photon est efficace. Il y a moins de photons à regrouper par paquet. A l'extrême, il se peut qu'il n'y ait qu'un seul photon incident par paquet. Dans ce cas, le regroupement de photons présente une efficacité minimale pour un coût mémoire maximal.

3.3 Méthode complète de rendu

La méthode de rendu des objets volumiques décrite au chapitre précédent est maintenant étendue à une méthode complète de rendu des objets, tant volumiques que surfaciques. La scène peut maintenant contenir à la fois des objets volumiques et des objets surfaciques. Les objets surfaciques peuvent être inclus, partiellement ou totalement, dans les objets volumiques.

La méthode que nous allons détailler possède toujours deux passes. Durant la passe d'illumination, nous effectuons la simulation du modèle particulaire de la lumière décrite dans les sections 3.1 et 3.2 de ce chapitre. Cette simulation permet de calculer l'énergie incidente en tout point de la scène, qu'il soit sur une surface ou dans un volume, et permet par conséquent d'en déduire la luminance réfléchie par ce point. La passe de visualisation permet quand à elle de calculer la luminance perçue par l'observateur.

3.3.1 Passe d'illumination

Dans cette passe, la méthode de regroupement de photons est utilisée uniquement pour les surfaces. En milieux participants, l'algorithme décrit au chapitre 2 est conservé. En effet, cette méthode est moins adaptée à ce type d'objets pour plusieurs raisons :

- Lorsqu'un photon pénètre dans un volume, il n'interagit pas obligatoirement avec celui-ci. Il peut le traverser sans subir de diffusion. Ceci est particulièrement valable pour les milieux faiblement participants. Le nombre de photons incidents à un volume est donc plus petit que pour une surface. Par conséquent, la méthode de groupement de photon est moins efficace.
- Les paquets nécessitent une structure de données supplémentaire. En trois dimensions, cette structure est d'un coût en mémoire trop élevé. Un échantillonnage précis de la géométrie du milieu et des directions n'est pas possible.

Cette passe d'illumination est une méthode de radiosité progressive de simulation. Au lieu de choisir aléatoirement une source lumineuse lorsqu'un photon est émis, la source la plus importante de la scène est sélectionnée et toute son énergie est émise sous la forme de photons portant chacun un quantum d'énergie q, paramètre de la simulation. Cette méthode peut être vue comme une approche stochastique des méthodes étendues de radiosité progressive [SAWG91][LS92][ICG86].

Le choix d'une méthode progressive est dicté par l'utilisation de la méthode de regroupement de photons : plus le nombre de photons émis est important, plus il y de chance que les paquets regroupent plusieurs photons. La méthode de regroupement est donc efficace.

La simulation dépend de deux paramètres : le quantum d'énergie q que doit porter chaque photon dans la mesure du possible et le quantum q' en dessous duquel nous faisons appel à la technique de la roulette russe.

Pour effectuer la simulation, le paquet le plus énergétique est choisi. La totalité de son énergie est émise sous la forme de photons porteurs d'énergie. La direction et l'énergie de chaque photon sont déterminées par un échantillonnage stochastique de la fonction de réémission du paquet.

Lorsqu'un photon rencontre une surface, deux cas peuvent se présenter :

- la surface est suffisamment diffuse pour utiliser la méthode de regroupement de photons. L'énergie portée par le photon est alors diminuée par l'absorption de la surface, puis additionnée à l'énergie du paquet le plus proche. Cette énergie est aussi ajoutée au compteur des énergies incidentes à la surface. Elle est stockée avec la direction d'incidence et la position du point d'impact du photon sur la surface. Elle sera plus tard convertie en luminance réfléchie par la surface.
- la surface est spéculaire ou quasi-spéculaire. La méthode de regroupement ne peut plus être utilisée pour ce type de surfaces. Il faut réémettre immédiatement le photon, après avoir pondéré son énergie par l'absorption de la surface. Si cette énergie est inférieure au quantum q', la technique de la roulette russe est utilisée pour déterminer si le photon est effectivement réémis. La luminance de ces surfaces variant très rapidement en fonction de la direction, son stockage serait trop fin, donc trop coûteux. Elle devra être calculée durant la phase d'illumination. Il est donc inutile d'utiliser un compteur des énergies incidentes à la surface.

Dans le cas d'une surface mixte, comportant à la fois une composante diffuse et une composante spéculaire [LS92][Sch94], l'énergie portée par le photon est répartie entre deux photons, l'un interagissant avec la partie spéculaire, l'autre la partie diffuse. La répartition se fait en fonction de l'importance de chaque composante.

Lorsqu'un photon pénètre dans un milieu participant, la méthode décrite au chapitre précédent est utilisée, en tenant compte de la présence des objets surfaciques dans le milieu.

A la fin de cette passe, toutes les énergies incidentes stockées à la surface des objets surfaciques, ainsi qu'à l'intérieur des objets volumiques sont converties en luminances réémises. Elles seront utilisées lors de la passe suivante.

L'algorithme de la simulation est le suivant :

Tant qu'il reste de l'énergie à émettre :
    Choisir le paquet contenant le plus d'énergie à émettre.
    Si l'énergie contenue dans le paquet est inférieure au seuil, alors
        Choisir par une roulette russe entre l'absorption de cette énergie
        et son augmentation.
    Emettre en échantillonnant sa fonction de réémission la totalité de son énergie
    sous la forme de photons.
    Initialiser à 0 l'énergie du paquet.
    Pour chaque photon, faire :
        Si le photon pénètre dans un objet volumique, alors
            Utiliser l'algorithme du chapitre précédant.
        Si le photon rencontre une surface alors
            Diminuer l'énergie du photon par l'atténuation de la surface.
            Si la surface est spéculaire alors
                Si l'énergie portée par le photon est inférieure au seuil, alors
                    Choisir par une roulette russe entre l'absorption du photon
                    et l'augmentation de son énergie.
                Si le photon n'a pas été absorbé alors
                    Le réémettre immédiatement.
            Sinon
                Mettre à jour le flux incident à la surface.
                Diminuer l'énergie du photon par l'atténuation de la surface.
                Ajouter l'énergie du photon au paquet le plus proche.

A la fin de la simulation, toutes les énergies incidentes sont converties en luminances réfléchies.

3.3.2 Passe de visualisation

Durant cette passe, nous calculons la luminance perçue par l'observateur. Comme dans un lancer de rayon classique [Whi80], des rayons de visualisation sont envoyés depuis le point d'observation à travers les pixels et progressent dans la scène. Ils accumulent pour chaque pixel la luminance présente à la surface ou à l'intérieur des objets rencontrés au cours de leur progression.

Nous associons à chaque rayon de visualisation un facteur d'atténuation, initialisé à 1. Ce facteur exprime le pourcentage perçue par l'oeil de la luminance de l'objet rencontré par le rayon.

Lorsqu'un rayon pénètre dans un objet volumique, il progresse incrémentalement en ligne droite. A chaque pas, son facteur d'atténuation est pondéré par la transmittance du milieu. Puis, la luminance présente sur le pas multipliée par le facteur d'atténuation est ajoutée à la luminance du pixel.

Lorsqu'un rayon rencontre une surface, la luminance de celle-ci est pondérée par le facteur d'atténuation, puis additionnée à la luminance du pixel. Lorsque la surface est diffuse ou imparfaitement diffuse, sa luminance est stockée et donc immédiatement utilisable. Par contre, lorsque la surface est spéculaire ou imparfaitement spéculaire, sa luminance n'a pu être stockée et il faut au préalable la calculer. La luminance $L(P,V)$ d'un point P dans une direction V s'exprime sous la forme d'une intégrale sur les directions de l'hémisphère (Equation 1.49). Cette luminance peut être calculée par une quadrature de Monte Carlo.

Pour une surface spéculaire ou imparfaitement spéculaire, l'expression de la luminance est :

$$L(P,V) = \int_{V' \in \mathcal{V}} (N.V')\ R(P,V,V')\ K_{\mathrm{v}}(P,P')\ L(P',V')\ dV' \tag{3.8}$$

Les directions incidentes V' sont échantillonnées. Pour chacune de ces directions, un rayon de visualisation est lancé pour calculer la luminance incidente $L_{\mathrm{i}}(P,V') = K_{\mathrm{v}}(P,P')\ L(P',V')$. La valeur de $L(P,V)$ est calculée à partir de ces luminances incidentes $L_{\mathrm{i}}(P,V')$.

Nous utilisons la fonction de réflectance $R(P,V,V')$ comme fonction de densité de probabilité pour effectuer un échantillonnage d'importance des directions V'. Comme cette fonction de réflectance est très directionnelle, la variance de l'évaluation de la luminance $L(P,V)$ est faible. Sa valeur est :

$$L(P,V) \approx \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} \rho_r(N.V')\ \ K_{\mathrm{v}}(P,P')\ L(P',V_s) \tag{3.9}$$

avec les directions V' échantillonnées selon la fonction de densité de probabilité $p(V') = \frac{R(P,V,V')}{\rho_r}$.

Le nombre S de directions échantillonnées dépend de la spécularité de la surface. Plus la surface est spéculaire, et moins ce nombre est élevé. Pour une surface parfaitement spéculaire, un seul échantillon est nécessaire.

3.4 Implémentation

3.4.1 Modèle de réflectance

Nous avons utilisé dans notre implémentation le modèle physique de fonction de distribution de réflectance bi-directionnelle proposé dans [Sch94]. C'est un modèle physique complet, modélisant les réflexions spéculaires, diffuses et mixtes. La réflexion mixte est fondée sur la théorie des micro-facettes [BS63]. Son avantage sur les modèles physiques proposés auparavant [CT81] [HTSG91] [War92] est sa simplicité. De plus, l'implémentation du modèle est efficace grâce à la technique d'approximation par fractions rationnelles.

Comme nous le verrons par la suite, ce modèle est de plus adapté au techniques d'échantillonnages utilisées par les techniques de Monte Carlo. Cependant, il se limite à la réflexion et ne traite pas la transmission par la surface.

Ce modèle ne fait intervenir que l'optique géométrique. La FDRB peut donc être décomposée en un facteur spectral $S_\lambda(V, H)$ et un facteur directionnel $D(P, V, V')$:

$$R_\lambda(P, V, V') = S_\lambda(V, H)\ D(P, V, V') \tag{3.10}$$

où H est le vecteur bi-secteur de la direction incidente V et de la direction réfléchie V'.

L'expression la plus simple du facteur spectral est une fonction constante :

$$S_\lambda(V, H) = C_\lambda \tag{3.11}$$

Ce facteur est en fait le facteur de Fresnel F. Ce facteur, très coûteux à calculer, est approximé par l'expression suivante :

$$S_\lambda(V, H) = C_\lambda + (1 - C_\lambda)(1 - (H.V))^5 \tag{3.12}$$

Le facteur directionnel est une somme pondérée de trois modèles de réflectance : le modèle de Lambert, le modèle des micro-facettes et le modèle de Fresnel.

$$D(P, V, V') = a\ \frac{1}{\pi}\ +\ b\ B(P, V, V')\ +\ c\ \frac{1}{(N.V')\ dV'}\ \Delta \quad \text{avec} \quad a + b + c = 1 \tag{3.13}$$

où Δ est une fonction de Dirac et où $B(P, V, V')$ est le facteur directionnel pour le modèle des micro-facettes. Les poids a, b et c sont définis par un processus automatique utilisant comme seul paramètre la rugosité r de la surface.

$$\text{si}\ (r < 0.5)\ \text{alors}\ \{b = 4r(1-r)\ ;\ a = 0\ ;\ c = 1-b\}\ \text{sinon}\ \{b = 4r(1-r)\ ;\ c = 0\ ;\ a = 1-b\} \tag{3.14}$$

Pour les surfaces isotropes, le facteur directionnel du modèle des micro-facettes est :

$$B(P, V, V') = \frac{1}{4\pi(N.V)(N.V')}\ \frac{r}{(1 + (r-1)(N.H)^2)^2} \tag{3.15}$$

3.4.2 Un modèle simple de sources lumineuses

Une source lumineuse est décrite par son spectre d'émission, sa puissance et sa fonction de distribution goniométrique pour chaque longueur d'onde échantillonnée. Différents modèles de sources lumineuses ont été proposés dans la littérature infographique. Les plus simples sont le modèle isotrope et le modèle parallèle. Pour les sources d'intensité irrégulière, plusieurs modèles d'une complexité croissante ont été proposés [War83] [VG84] [NON85].

Nous proposons un modèle simple de source lumineuse surfacique, dérivé du modèle de réflectance utilisé. Une source lumineuse est une surface de rugosité r et disposant d'un seul paquet, échantillonnant la direction de la normale à la surface. Ce paquet contient la puissance de la source pour chaque longueur d'onde échantillonnée. La fonction de distribution goniométrique de la source est la fonction de distribution directionnelle f du paquet. Elle est définie en fonction du facteur directionnel des micro-facettes $B(P, V, V')$ (Equation 3.15).

$$f(P, V) = B(P, V, N)(N.V) \tag{3.16}$$

Cette fonction est la même pour toutes les longueurs d'ondes échantillonnées.

Nous pouvons avec ce seul modèle définir des sources allant des sources surfaciques isotropes ($r = 1$) aux sources surfaciques parallèles ($r \to 0$). Ce modèle est assez proche de celui proposé dans [War83]. Il est cependant beaucoup moins coûteux et mieux adapté à une méthode de simulation de Monte Carlo. Pour des raisons d'efficacité, les sources isotropes et parallèles sont toujours décrites par leurs modèles respectifs.

La définition des sources lumineuses, les sources primaires, est très proche de la définition des surfaces, les sources secondaires. Ceci permet d'échantillonner de manière unique les émissions des deux types de sources.

3.4.3 Structure de données des paquets

Le stockage des paquets à la surface d'un objet nécessite deux échantillonnages : celui de la surface de l'objet et celui des fonctions de réémission.

La surface de l'objet est échantillonnée en lui appliquant une nappe paramétrique en u et en v. Il existe une bijection entre les points de la nappe de coordonnées (u, v), $u, v \in [0, 1]^2$, et les points de la surface de l'objet de coordonnées (x, y, z). Cette nappe est découpée en une grille de facettes rectangulaires appelées *patchs*. Pour découper une nappe en $n.m$ patchs, il suffit de découper l'espace u en n intervalles $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], ..., [\frac{n-1}{n}, 1]$ et de la même façon l'espace v en m intervalles $[0, \frac{1}{m}], [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}], ..., [\frac{m-1}{m}, 1]$. Il est facile en utilisant la bijection de savoir à quel patch appartient un point de la surface de l'objet. Les textures 2D appliquées aux surfaces sont une application courante des nappes uv. Mais, au lieu de stocker dans chaque patch un coefficient de réflexion, un ensemble de paquets est associé à chaque patch.

Ce découpage régulier ne tient pas compte des variations de l'illumination de la surface. Il ne peut donc pas rendre fidèlement les ombres nettes ou les détails d'illumination. Des maillages adaptatifs ont été proposés pour les simulations de Monte Carlo, utilisant des *quadtrees* [Hec90] ou des patchs triangulaires [SWH$^+$95][ZWHS95].

Pour chaque patch, un échantillonnage de la fonction de réémission est effectué. Cette fonction s'exprime généralement en fonction de la direction incidente. Echantillonner la fonction de réémission revient donc à échantillonner les directions incidentes. Pour cela, la même structure que pour les milieux participants peut être utilisée : une sphère échan-

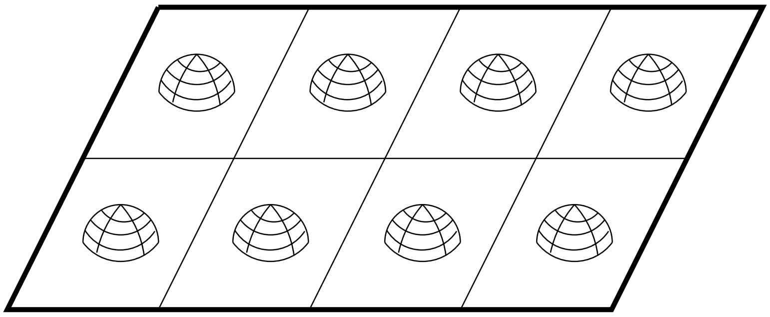


Figure 3.1 : Stockage des paquets

tillonnée par méridiens et parallèles. Un paquet est associé à chaque échantillon de la sphère. Un hémisphère est suffisant pour une surface opaque.

Contrairement aux milieux participants, l'échantillonnage des directions incidentes à une surface ne doit pas être uniforme. En effet, si nous supposons le flux de photons constant dans toutes les directions d'incidence de la surface, le nombre de photons la rencontrant est proportionnel à $N.V$, avec N la normale à la surface et V la direction d'incidence. Le nombre de photons rencontrant la surface sous une direction perpendiculaire est supérieur à celui des photons sous une direction rasante. Un échantillonnage uniforme de l'hémisphère n'est donc pas approprié. L'hémisphère doit être échantillonné de façon à ce que dans le cas d'un flux constant, le nombre de photons incidents à la surface soit le même dans chaque direction. Les échantillons doivent être d'autant plus grands que la direction est rasante. Cet échantillonnage est le même que celui proposé dans [LS92].

Si l'hémisphère est échantillonné avec M méridiens et N parallèles (le pôle et l'équateur comptent chacun pour un parallèle), alors la position du méridien i est donnée par l'angle azimutal ϕ_i et celle du parallèle j par l'angle polaire θ_j.

$$\phi_i = \frac{2\pi}{M} \qquad \forall i \in [0, M-1] \tag{3.17}$$

$$\cos\theta_j = \sqrt{\frac{N-1-j}{N-1}} \qquad \forall j \in [0, N-1] \tag{3.18}$$

Pour les surfaces translucides, l'échantillonnage de la sphère des directions est effectué en accolant par l'équateur deux hémisphères.

Le modèle de réflectance que nous utilisons [Sch94] est la composition de trois modèles : un spéculaire, un diffus et un mixte. La réémission spéculaire des photons ne peut pas être effectuée par les paquets et ne ne nécessite donc pas de stockage. La réémission diffuse est constante, quelle que soit la direction d'incidence des photons. Elle nécessite donc un seul paquet pour tout le patch. Finalement, la fonction de réémission du modèle mixte varie en fonction de la direction des photons incidents. Elle nécessite donc un hémisphère pour stocker les paquets. Le nombre d'échantillons de l'hémisphère dépend la forme de la fonction de réémission : plus elle est proche du spéculaire, plus le nombre d'échantillons doit être élevé.

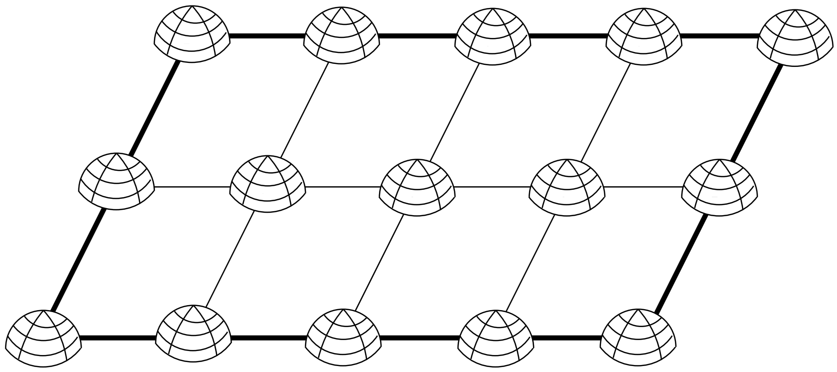


Figure 3.2 : Stockage des luminances

3.4.4 Stockage des énergies et des luminances

Comme dans les milieux participants, à chaque fois qu'un photon interagit avec la matière, son énergie et sa direction incidente sont stockées. En fin de simulation, toutes les énergies incidentes à une surface sont converties en luminances réfléchies.

Pour stocker ces deux grandeurs, nous utilisons une structure proche de celle utilisée pour les paquets : nous discrétisons la surface en patch et discrétisons l'espace des directions avec un hémisphère. La discrétisation de l'hémisphère est identique à celle de l'hémisphère des paquets. Par contre, la position des hémisphères sur les patchs est différente : au lieu d'être placés au centre des patchs, les hémisphères sont positionnés sur leurs sommets (Figure 3.2). La description de la luminance de la surface est continue sans effectuer de lissage. Le problème de bande de Mach est ainsi évité. Lorsqu'un photon rencontre un patch, son énergie est répartie entre les quatre hémisphères placés au quatre sommets du patch, en fonction de la distance du point d'impact à chaque hémisphère.

De même, lorsque les énergies incidentes sont converties en luminances réfléchies, les échantillons de l'hémisphère sont placés non plus au centre des facettes, mais aux intersections des méridiens et des parallèles afin d'avoir une description continue de la luminance en fonction de la direction.

3.4.5 Emission de l'énergie contenue dans un paquet

Lorsqu'un paquet contient suffisamment d'énergie, celle-ci est réémise sous forme de photons. Cette émission nécessite deux échantillonnages : l'échantillonnage de la surface du patch associé au paquet pour déterminer la position d'émission du photon et l'échantillonnage de la fonction de réémission du paquet pour déterminer la direction et la quantité d'énergie portée par le photon.

3.4.5.1 Choix du nombre d'échantillons du paquet

Dans la mesure du possible, nous devons faire en sorte que chaque photon émis porte un quantum d'énergie Q, donné comme paramètre de la simulation. Si le paquet contient une énergie E, le nombre P de photons à émettre est donc :

$$P = \frac{E}{Q} \tag{3.19}$$

3.4.5.2 Echantillonnage des surfaces émettrices

Pour définir la position d'émission d'un photon, on effectue un échantillonnage d'importance de la surface du patch associé au paquet. Il faut cependant remarquer que le plaquage d'une nappe uv sur une surface peut déformer la nappe. Cette déformation est de même nature que celle que subissent les textures 2D lorsqu'elles sont plaquées sur un objet non plan. La géométrie du patch associé un paquet, si elle est rectangulaire dans l'espace de la nappe uv, peut donc être modifiée lorsque le patch est plaqué à la surface d'un objet. C'est cette géométrie modifiée qu'il faut échantillonner pour obtenir un échantillonnage correct de la surface.

Les équations d'échantillonnage pour la géométrie des surfaces les plus courantes sont données dans [PM93a].

3.4.5.3 Echantillonnage de la fonction de réémission

Principe de l'émission

L'émission des photons correspond à une évaluation de l'émission E du paquet par une quadrature de Monte Carlo. Chaque photon est un échantillon et la somme des énergies portées par les photons est une estimation E' de l'émission E du paquet.

L'émission E du paquet est la primitive de la fonction de réémission $e(V)$ définie par :

$$\begin{aligned} e(V) &= E f_r(P, V_{paquet}, V) && (3.20) \\ &= \frac{E}{\rho_r} R(P, V_{paquet}, V)(N.V) && (3.21) \end{aligned}$$

où N la normale à la surface.

Nous réécrivons $e(V)$ sous une forme adaptée à la quadrature de Monte Carlo, comprenant une fonction de densité de probabilité $p(V)$.

$$e(V) = p(V)e'(V) \tag{3.22}$$

Pour émettre le i-ème photon, nous choisissons aléatoirement sa direction V_i selon la fonction de densité de probabilité p. L'énergie portée par le photon est $\frac{e'(V_i)}{P}$ où P est le nombre total de photons émis.

La somme des énergies portées par les photons est bien l'estimation E' de l'émission E du paquet.

$$E' = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P} e'(V_i) \approx E \tag{3.23}$$

Pour obtenir une estimation exacte, c'est à dire $E' = E$, et donc émettre la quantité exacte d'énergie, il faut réduire la variance de E' à zéro en effectuant un échantillonnage d'importance optimal. Cet échantillonnage est possible, car la valeur de E est déjà connue. Il faut choisir une fonction $e'(V)$ de variance nulle, donc une fonction constante. Nous obtenons :

$$p(V) = \frac{e(V)}{E} \quad et \quad e'(V) = E \tag{3.24}$$

Dans notre implémentation, la fonction de réémission des paquets peut être de trois type : parallèle, diffuse ou micro-facettes.

Emission parallèle

La fonction de réémission parallèle est très simple à échantillonner.

$$\begin{aligned} e(V) &= E \quad si \quad V = V_{paquet} && (3.25)\\ &= 0 \quad si \quad V \neq V_{paquet} && (3.26)\end{aligned}$$

La fonction de densité de probabilité $p(V)$ est une fonction discrète. Le choix de la direction et de l'énergie des photons sont uniques.

$$\begin{aligned} p(V) &= 1 \quad et \quad e'(V) = E \quad si \quad V = V_{paquet} && (3.27)\\ &= 0 \quad et \quad e'(V) = 0 \quad si \quad V \neq V_{paquet} && (3.28)\end{aligned}$$

Emission diffuse

La fonction de réflectance d'une surface diffuse est $\forall V \in S \quad R(P, V_{paquet}, V) = \frac{\rho_r}{\pi}$, avec ρ_r le coefficient de réflexion de la surface et S l'ensemble des directions de l'hémisphère. D'après l'équation 3.21, la fonction de réémission diffuse est :

$$e(V) = E\frac{(N.V)}{\pi} \tag{3.29}$$

Elle se décompose pour la quadrature de Monte Carlo en :

$$p(V) = \frac{(N.V)}{\pi} \quad et \quad e'(V) = E \tag{3.30}$$

Cette décomposition permet un échantillonnage d'importance optimal (e'(V) constante) et donc une évaluation de E exacte.

La direction V peut s'exprimer en coordonnées hémisphériques, en fonction d'un angle polaire θ et d'un angle azimutal ϕ. La fonction $p(V)$ se décompose alors en $p_{zénith}(\theta)p_{azimut}(\phi)$ avec

$$p_{zénith}(\theta) = 2\cos\theta\sin\theta \quad et \quad p_{azimut}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \tag{3.31}$$

Les fonctions $p_{zénith}(\theta)$ et $p_{azimut}(\phi)$ étant intégrables et inversibles, nous pouvons utiliser la technique de transformation de variable aléatoire pour tirer θ et ϕ.

$$\theta = \cos^{-1}\sqrt{\xi_0} \quad et \quad \phi = 2\pi\xi_1 \tag{3.32}$$

où ξ_0 et ξ_1 sont des nombres aléatoires uniformes entre 0 et 1.

Emission des micro-facettes

La fonction de réémission d'une surface composée de micro-facettes s'exprime en fonction du facteur directionnel des micro-facettes $B(P, V_{paquet}, V)$.

$$e(V) = E\ B(P, V_{paquet}, V)\ (N.V) \tag{3.33}$$

Pour obtenir un échantillonnage d'importance optimal (Equation 3.24), nous devons décomposer $e(V)$ en :

$$p(V) = B(P, V_{paquet}, V)\ (N.V) \quad et \quad e'(V) = E \tag{3.34}$$

Cette fonction $p(V)$ n'est ni intégrable, ni inversible. La technique de transformation de variable aléatoire n'est donc pas utilisable pour générer aléatoirement les directions V. Il faut avoir recourt à la technique d'échantillonnage par rejet. Cependant, cette technique est coûteuse, plusieurs essais étant généralement nécessaires avant d'obtenir une direction. Le nombre de rejets est d'autant plus important que la variance $p(v)$ est élevée, $i.e$ que la fonction de réflectance de la surface est directionnelle.

Confronté à ce coût, nous avons abandonné ce type d'échantillonnage. Nous choisissons donc une fonction de densité de probabilité $p(V)$ intégrable et inversible pour pouvoir utiliser la technique de transformation de variable aléatoire. En contre partie, l'échantillonnage d'importance n'est plus optimal et l'estimation E' a une variance non nulle.

En remplaçant $B(P, V_{paquet}, V)$ par son expression (Equation 3.15), l'expression de la fonction de réémission $e(V)$ devient :

$$e(V) = E\ \frac{1}{4\pi}\ \frac{r}{(1+(r-1)(N.H)^2)^2}\ (N.V) \tag{3.35}$$

où H est le vecteur bi-secteur de V et V_{paquet}.

Lorsque nous réécrivons $e(V)$ en $p(V)e'(V)$, nous devons veiller à ce que $p(V)$ soit une fonction de densité de probabilité intégrable et inversible et à ce que la variance de $e'(V)$ soit minimale. En fonction de la valeur de la rugosité r de la surface, deux décompositions sont possibles.

Si r est proche de 1, le facteur directionnel des micro-facettes $B(P, V_{paquet}, V)$ varie moins que $(N.V)$. La fonction $e(v)$ est décomposée en :

$$p(V) = \frac{(N.V)}{\pi} \quad et \quad e'(V) = E \; \frac{1}{4} \; \frac{r}{(1 + (r-1)(N.H)^2)^2} \tag{3.36}$$

La fonction $p(V)$ la même fonction de densité de probabilité que pour les surfaces diffuses. Seule la valeur de $e'(V)$ change en fonction de la direction.

Si r est proche de 0, le facteur directionnel des micro-facettes varie au contraire beaucoup plus que $(N.V)$. Comme ce facteur est intégrable et inversible [Sch94], nous pouvons l'utiliser comme fonction de densité de probabilité. La fonction $e(V)$ est décomposée en :

$$p(V) = p'(H) = \frac{r}{(1 + (r-1)(N.H)^2)^2} \quad et \quad e'(V) = E \; \frac{1}{4\pi} \; (N.V) \tag{3.37}$$

Lorsque H est exprimé en coordonnées hémisphériques en fonction de l'angle polaire θ et de l'angle azimutal ϕ, les fonctions de densité de probabilité sont :

$$p_{zénith}(\theta) = 2\cos\theta \sin\theta \frac{2r\cos\theta\sin\theta}{(1 + (r-1)(\cos\theta)^2)^2} \quad et \quad p_{azimut}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \tag{3.38}$$

En utilisant la technique de transformation de variable aléatoire sur $p_{zénith}(\theta)$ et $p_{azimut}(\phi)$, nous obtenons pour θ et ϕ [Sch94] :

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{\xi_0}{r + \xi_0(1-r)}} \quad et \quad \phi = 2\pi\xi_1 \tag{3.39}$$

Comme cet échantillonnage d'importance n'est pas optimal, la somme des énergies des photons émis correspond à une estimation E' de E, de variance non nulle et donc soumise à une erreur Δ. Comme nous connaissons déjà E, nous pouvons annuler cette erreur en échantillonnant la fonction de réémission jusqu'à ce que $E' = E$.

L'algorithme de l'émission est alors :

$E' = 0$
Tant que $E' \neq E$:
    Echantillonner un photon de quantum Q_i.
    Si $E' + Q_i > E$, alors $Q_i = E - E'$
    $E' = E' + Q_i$
    Emettre le photon.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu aux objets surfaciques la simulation décrite dans le chapitre précédant pour aboutir à une modèle complet d'illumination, traitant à la fois les objets surfaciques et les milieux participants. Les caractéristiques optiques des objets surfaciques ne sont pas limitées : leur fonctions de réflectance peuvent être spéculaires, diffuses ou mixtes. Nous avons décrit une technique de regroupement de photon permettant, d'une part de conserver une efficacité constante à chaque pas de calcul de la simulation, d'autre part de terminer de façon déterministe la marche aléatoire des photons et de limiter ainsi l'utilisation de la technique de la roulette russe qui augmente la variance.

Dans notre implémentation, nous avons utilisé des fonctions de réflectances permettant l'utilisation de l'échantillonnage d'importance des directions d'émission des photons. Cet échantillonnage est beaucoup plus rapide que l'échantillonnage par rejet.

Chapitre 4

Visualisation des champs scalaires tri-dimensionnels

La visualisation scientifique comporte un grand nombre de domaines d'applications : l'imagerie médicale, la météorologie, l'interprétation de données expérimentales .... Cette visualisation dépend fortement de la synthèse d'images. Un problème difficile de la visualisation est le rendu de la notion de profondeur sur une image bi-dimensionnelle. Une synthèse d'image de qualité avec des modèles d'illumination précis est nécessaire pour restituer cette notion.

Nous proposons d'utiliser notre modèle d'illumination complet (surfaces et volumes) pour visualiser les champs scalaires tri-dimensionnels. Ce sont des fonctions donnant généralement pour chaque triplet (x, y, z), les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, une valeur scalaire représentative du phénomène visualisé : intensité d'un champ magnétique, densité de probabilité du nuage électronique d'un atome, données géologiques... Cette valeur peut être calculée ou empiriquement mesurée. Le champ scalaire est souvent représenté sous une forme discrète comme en ensemble fini de points d'échantillonnage valués. La distribution spatiale de ces points dépend de la structure de données choisie : une image tri-dimensionnelle composée de voxels [Sab88], une grille de nœuds [Ina91], un octree [Mea82] [FM85].

La visualisation des champs scalaires est problématique car, ils sont définis en trois dimensions et ils n'ont pas de surfaces. Une approche classique consiste à visualiser une surface définie à partir du champ scalaire. La surface peut être simplement définie par un ou plusieurs plans de coupe ou peut être composée de facettes polygonales générées à partir des valeurs du champ [LC87] [Wal91]. Mais ces techniques affichent seulement un sous-ensemble du champ scalaire, laissant de coté une grande partie des données qu'il contient. Dans [Sab88], Sabella propose une méthode pour visualiser les champs scalaires tri-dimensionnels dans laquelle le champ est rendu comme un milieu participant auto-émetteur. Il utilise un modèle d'illumination simple, utilisant des éléments de la physique de la lumière en milieu participant.

Nous proposons d'aller plus loin dans cette voie. Nous utilisons notre méthode volumique d'illumination des milieux participants pour effectuer une bijection précise entre les champs et un milieu participant connu de tous, la brume [BW97]. Le rendu réaliste du milieu permet une interprétation plus intuitive de l'image.

4.1 Méthode de Sabella

Sabella établit une bijection entre le champ scalaire à visualiser et un milieu participant composé de particules possédant une émission propre. Ces particules ont un volume v_p, une section efficace de diffusion σ, une section efficace d'absorption α nulle et une luminance propre isotrope r. Leur densité varie en fonction de la valeur du champ scalaire. Elle est définie de manière non-dimensionnelle, comme le rapport du volume dV_p occupé par les particules sur le volume dV contenant ces particules :

$$\rho_v(P) = \frac{dV_p}{dV} \tag{4.1}$$

$$= \rho(P) v_p \tag{4.2}$$

où $\rho(P)$ est la densité exprimée en $nombre\ de\ particules.cm^{-3}$ (Equation 1.39).

La luminance $dL(P, V)$ émise par un point P du milieu dans une direction V est :

$$\frac{dL(P,V)}{dP} = L_e(P,V) \tag{4.3}$$

$$= \frac{r\sigma}{v_p}\rho_v(P) \tag{4.4}$$

En intégrant, nous obtenons la luminance perçue en un point P depuis une direction $-V$ est donc :

$$L(P,V) = \frac{r\sigma}{v_p}\int_{P1}^{P2} \rho_v(P')e^{-\frac{\sigma}{v_p}\int_{P1}^{P'}\rho_v(P'')dP''}dP' \tag{4.5}$$

où $P1$ et $P2$ sont les points d'entrée et de sortie du milieu d'un rayon issu de P dans la direction $-V$.

Le terme $\frac{\sigma}{v_p}$ est remplacé par un coefficient de diffusion relatif k_d, exprimé par unité de longueur et, comme l'auteur ne recherche pas un rendu réaliste, l'équation 4.5 est normalisée en choisissant $\frac{r\sigma}{v_p} = 1$:

$$L(P,V) = \int_{P1}^{P2} \rho_v(P')e^{-k_d\int_{P1}^{P'}\rho_v(P'')dP''}dP' \tag{4.6}$$

Cette équation est en fait une version simplifiée de l'équation d'illumination de Kajiya et Von Herzen [KV84], dans laquelle on néglige l'atténuation entre la source lumineuse est le point de diffusion. Finalement, la densité ρ_v est remplacée dans l'équation 4.6 par une densité ρ'_v avec la relation :

$$\rho'_v = \rho_v^\gamma \tag{4.7}$$

La luminance perçue est maintenant :

$$L(P,V) = \int_{P1}^{P2} \rho_v^{\gamma}(P') e^{-k_d \int_{P1}^{P'} \rho_v^{\gamma}(P'')dP''} dP' \tag{4.8}$$

La visualisation d'un champ scalaire dépend donc de deux paramètres :

- Le coefficient de diffusion k_d. Il sert à contrôler l'atténuation. Plus celui-ci est important, plus l'atténuation est grande et moins l'intérieur du milieu est perçu.
- Le coefficient γ. Il contrôle l'éventail des valeurs des densités. Un γ supérieur à 1 diminue l'importance des zones de faible densité par rapport aux zones de forte densité. A l'inverse, un γ inférieur à 1 augmente l'importance des zones de faible densité par rapport aux zones de forte densité.

4.2 Méthode fondée sur un rendu réaliste

Notre visualisation des champs scalaires tri-dimensionnels est fondée sur le même principe que celle de Sabella : nous visualisons les champs scalaires sous la forme de milieux participants. Mais au lieu de visualiser un milieu émettant sa propre luminance, nous utilisons un milieu uniquement diffusant, qui absorbe et diffuse la lumière provenant de sources lumineuses. Nous effectuons une bijection entre le champ et un milieu participant couramment observé, la brume. La densité de la brume dépend des valeurs du champ. Nous utilisons notre méthode volumique d'illumination pour visualiser la brume, considérant qu'un calcul précis de l'illumination de la brume permet une interprétation plus intuitive de l'image. Plus la brume parait dense, plus les valeurs du champ sont élevées. De plus, la présence de l'ombre du milieu sur des surfaces permet une meilleure perception de la profondeur. Enfin, nous avons la possibilité de choisir la géométrie, la position et la distribution goniométrique des sources lumineuses afin de mettre en évidence certaines zones du champ scalaire.

La visualisation du champ scalaire tri-dimensionnel dépend de quatre paramètres :

- la fonction de phase du milieu participant,
- les caractéristiques des sources lumineuses : nombre, intensité, position, distribution goniométrique,
- le coefficient d'absorption k_a,
- le coefficient de diffusion k_d.

Nous allons étudier chacun de ces paramètres pour voir leur influence sur la visualisation, en vue d'optimiser leur utilisation.

4.2.1 Fonctions de phase

Les gouttes d'eau constituant la brume sont des particules sphériques d'un diamètre du même ordre que la longueur d'onde du spectre visible. Nous avons donc une diffusion "essentiellement dirigée vers l'avant" (Figure 1.13). En fixant le paramètre k de la fonction de phase de Schlick à 0.7, nous obtenons la fonction de phase d'un tel milieu.

4.2.2 Sources lumineuses

De façon à obtenir une interprétation aisée de l'image, nous utilisons seulement des sources blanches, contenant toutes les longueurs d'ondes.

Nous utilisons deux sortes de sources lumineuses :

- les sources globales. Ce sont des sources parallèles d'intensité constante illuminant complètement le champ. Elles sont placées parallèlement au surfaces entourant le champ scalaire. Elles permettent d'obtenir une ombre non déformée du champ sur les surfaces. Généralement, une seule source est nécessaire pour obtenir une bonne visualisation du champ.
- les sources locales. Elles ont une distribution goniométrique et une intensité fixée par l'utilisateur. Elles sont placées arbitrairement à l'intérieur ou à l'extérieur du champ. Ces sources permettent de souligner une zone précise du milieux.

La qualité de l'illumination dépend du nombre de photons émis par les sources, ainsi que de la définition de la grille de voxels optiques. Lorsque cette grille est fine, le résultat de l'illumination est plus précis, mais il est nécessaire de lancer un plus grand nombre de photons.

4.2.3 Coefficient d'absorption

Le facteur d'atténuation volumique K_V est une fonction exponentielle de trois variables :

- la longueur du trajet à travers le milieu,
- la densité ρ,
- le coefficient d'absorption k_a,

La longueur et la densité dépendent de la géométrie du milieu, mais nous pouvons contrôler le coefficient d'absorption k_a pour paramétrer la visualisation du champ scalaire.

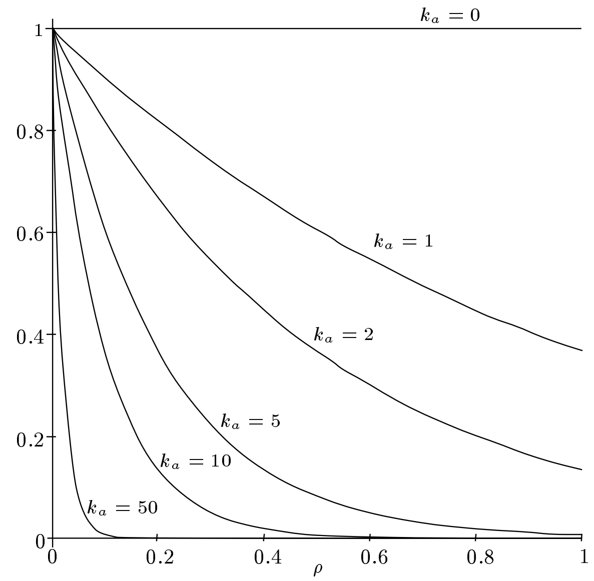


Figure 4.1 : Facteur d'atténuation volumique

La figure 4.1 montre que K_V varie de manière continue en fonction de k_a de la fonction constante 1 quand $k_a = 0$ — pas d'absorption — à une fonction décroissant rapidement vers l'asymptote 0 — absorption importante —.

Le coefficient d'absorption k_a contrôle donc la profondeur de l'illumination et de la visualisation du champ. Des coefficients d'absorption k_a différents peuvent être utilisés pour la passe d'illumination et la passe de visualisation. Ceci permet de choisir séparement la profondeur d'illumination et de visualisation du champ. Quand k_a est élevé, les photons sont rapidement absorbés et pénètrent pas profondément dans le milieu. Par conséquent, seule sa surface est illuminée. De la même manière, les rayons de visualisation récupèrent seulement l'illumination de la surface. Le champ apparaît comme un objet solide. Quand k_a est petit, l'absorption est faible. Les photons et les rayons de visualisations voyagent librement à travers le champ. Celui-ci est entièrement illuminé et est visible dans son ensemble.

La figure 4.2 montre un champ visualisé avec $k_a = 0$. La figure 4.3 montre le même champ visualisé avec $k_a = 0.1$. Seul la luminance à la surface du champ est visible, au lieu de la luminance du champ dans son entier. Ceci explique l'image plus sombre.

4.2.4 Coefficient de diffusion

La probabilité d'interception dépend du coefficient de diffusion k_d. La figure 4.4 montre que le comportement de cette probabilité est similaire au comportement de K_V : elle varie en fonction de k_d de la fonction constante 0 à une fonction croissant rapidement à l'asymptote 1. Par conséquent, le coefficient de diffusion k_d contrôle l'intensité de l'illumination. Quand k_d est faible, les valeurs les plus faibles ne diffusent pas assez de lumière et seules les valeurs

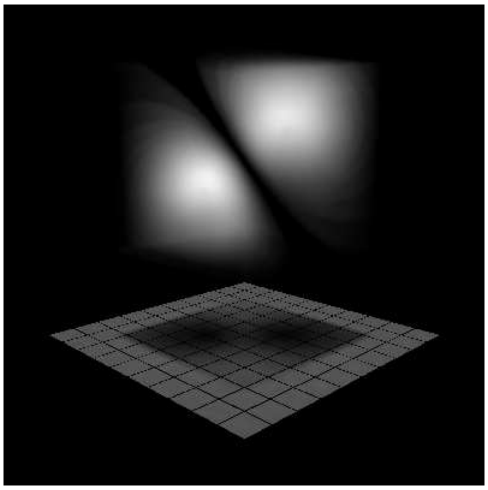


Figure 4.2 : $k_a = 0.0$, $k_d = 1.0$

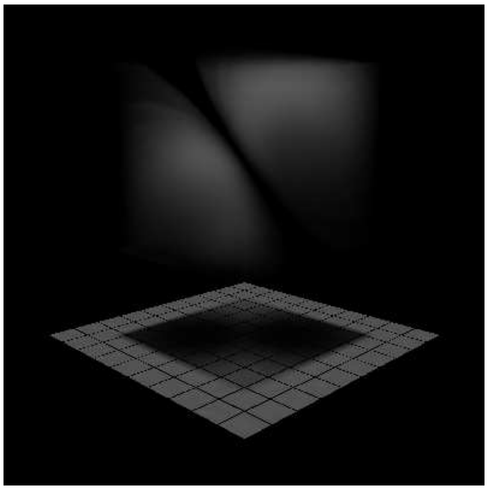


Figure 4.3 : $k_a = 1.0$, $k_d = 1.0$

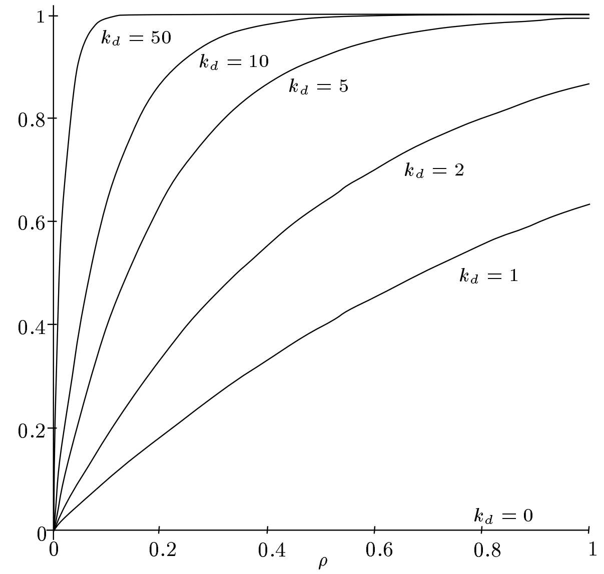


Figure 4.4 : Probabilité d'interception

élevées du champ sont visibles. Quand k_d est élevé, tout le champ diffuse la lumière et est par conséquent entièrement visible.

La figure 4.5 montre le champ illuminé avec $k_a = 0.0$ et $k_d = 0.1$. Seules les zones de forte intensité sont visibles. Leur ombre sur la surface permet d'évaluer facilement leur position dans l'espace. Lorsque nous augmentons progressivement k_d jusqu'à 0.3 (Figure 4.6), puis 1.0 (figure 4.7), le reste du champ apparaît progressivement. Les valeurs élevée situées au centre du champ restent visibles, le coefficient d'absorption étant nul.

4.3 Résultats

Le champ scalaire tri-dimensionnel utilisé pour illustrer cette méthode est l'intensité du champ magnétique généré par un dipôle. Sa taille de la grille de voxels échantillonnant ce champ est de 64x64x64. La définition de la grille optique utilisée est 16x16x16 voxels. La passe d'illumination prend en moyenne 450 secondes et celle de visualisation 21 secondes pour une image de 400x400 pixels. Le résultat d'une passe d'illumination peut être utilisé pour générer rapidement plusieurs images sous des angles de vue différents. Ces images ont été produites sur une station de travail Silicon Graphics Onyx 10000 à partir de notre logiciel de rendu général.

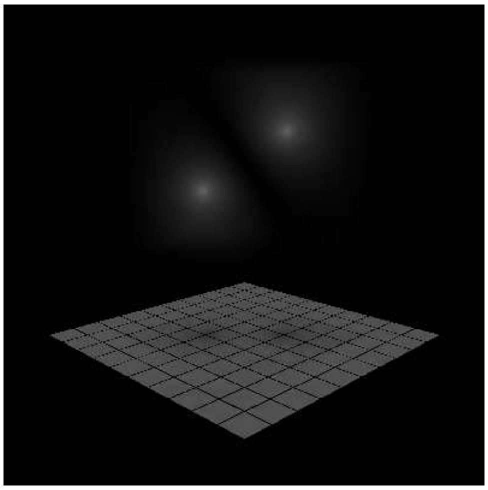


Figure 4.5 : $k_a = 0.0$, $k_d = 0.1$

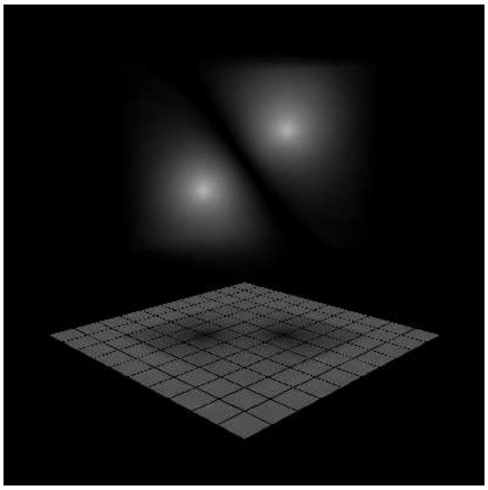


Figure 4.6 : $k_a = 0.0$, $k_d = 0.3$

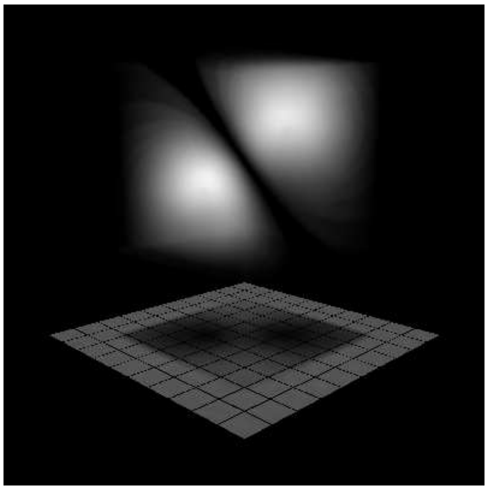


Figure 4.7 : $k_a = 0.0$, $k_d = 1.0$

4.4 Extension du modèle à la couleur

Notre modèle est monochromatique. Il peut être utilisé avec le mapping dans l'espace des couleurs proposé dans [Sab88] de façon à mettre en valeur les régions de fortes valeurs. Ceci correspond à l'affichage en fausses couleurs couramment utilisé en visualisation scientifique [RE91].

Une extension intéressante est l'introduction de la couleur directement dans le modèle de rendu. L'utilisation de plusieurs longueurs d'ondes permet d'utiliser différentes valeurs de k_a et k_d pour visualiser différents intervalles de valeurs du champ scalaire. Ceci permet de mettre en relief certaines valeurs, mais aussi d'en masquer d'autres en choisissant des valeurs faibles ou nulles pour k_a et k_d.

Chapitre 5

Simulation de la diffusion des gaz en milieux micro-poreux

Les milieux micro-poreux sont des milieux solides contenant de nombreux pores de petit diamètre. Les poudres fines, les feutres (milieux fibreux), les empilements de tissus sont des exemples de tels milieux. La diffusion des gaz dans ces milieux joue un rôle très important dans de nombreux processus tels que la densification, la catalyse hétérogène, *etc.* Connaître la diffusivité des gaz dans un milieu micro-poreux, en fonction de divers paramètres physiques, chimiques et géométriques, permet de mieux contrôler ces procédés. De nombreuses méthodes de simulation de ce processus de diffusion ont été développées et en particulier des techniques de Monte Carlo [ZC89][SL86][MJ92][TS93][Vig95].

La diffusion des gaz dans les milieux participants présente de nombreux points communs avec la diffusion de la lumière dans une scène comportant des objets surfaciques et volumiques. Photons et molécules de gaz ont des comportements très similaires. Comme un photon, une molécule de gaz est “réfléchie” dans une nouvelle direction lorsqu'elle rencontre une surface. De même, lorsqu'une molécule heurte une autre molécule de gaz, elle est diffusée comme l'est un photon lorsqu'il rencontre une particule dans un milieu participant. La probabilité de collision d'une molécule avec une autre suit une loi exponentielle, comme la probabilité d'interaction des photons.

A partir de cette constatation, nous avons développé une méthode de simulation de la diffusion des gaz. L'originalité de notre approche provient de l'utilisation de techniques issues de divers domaines de la synthèse d'image : facettisation de données volumiques, partitionnement spatial, images de distances.

5.1 Préliminaires physiques

La molécules de gaz se déplacent naturellement à une vitesse v (vitesse d'agitation moléculaire) dont la distribution suit une loi gaussienne (loi de Maxwell Bolztmann). Au cours de ces déplacements, elles entrent en collision avec l'environnement qui les entoure. La diffusion des gaz est liée à ce phénomène. Une approximation courante consiste à considérer que toutes les particules se déplacent à une vitesse égale à la vitesse moyenne $< v >$. Dans ce cas, la distribution des libres parcours (distance entre deux chocs molécule-molécule) suit une loi exponentielle qui diffère de moins de 1% de la distribution exacte. Lorsque les gaz sont confinés dans un milieu micro-poreux, l'environnement des molécules est constitué par d'autres molécules de gaz et par des parois des pores du milieu. Lorsque les molécules de gaz heurtent exclusivement les autres molécules de gaz, la diffusion est dite "binaire" ou "ordinaire". Lorsque les molécules de gaz heurtent exclusivement les parois des pores, la diffusion est dite "de Knudsen". Ces deux régimes de diffusion sont des cas limites. Dans un milieu micro-poreux, les molécules de gaz heurtent à la fois les parois des pores et les autres molécules. On est alors en régime de diffusion mixte.

5.1.1 Diffusion binaire

La diffusion binaire des molécules d'un gaz est caractérisée par le coefficient de diffusion binaire D_b, dont une expression approchée est :

$$D_b = \frac{1}{3} < v >< \lambda > \tag{5.1}$$

où $< v >$ est la vitesse moyenne d'agitation thermique et $< \lambda >$ le libre parcours moyen, c'est à dire la distance moyenne que parcourt une molécule de gaz entre deux collisions avec les autres molécules.

La vitesse moyenne d'agitation thermique est donnée par :

$$< v >= \sqrt{\frac{8RT}{M\pi}} \tag{5.2}$$

avec T la température, R la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz.

5.1.2 Diffusion de Knudsen

La diffusion de Knudsen des molécules d'un gaz est caractérisée par le coefficient de diffusion de Knudsen D_K. Une formule approchée pour D_K est la suivante :

$$D_K = \frac{1}{3} < v >< d > \tag{5.3}$$

où $< d >$ la distance moyenne entre deux collisions molécule-paroi, *i.e.* la corde moyenne.

Plusieurs estimations de $< d >$ peuvent être effectuées *a priori*. La plus simple consiste à considérer la relation suivante :

$$< d >= \frac{4\epsilon}{S_V} \tag{5.4}$$

où ϵ est la porosité du milieu, c'est à dire la fraction du volume occupé par les pores sur le volume total du milieu, et S_V est la surface spécifique, c'est à dire la somme de la surface des pores divisée par le volume du milieu. $< d >$ est le diamètre hydraulique (diamètre apparent des pores). Cette expression est exacte uniquement pour un pore rectiligne de section circulaire ou rectangulaire.

Une meilleure estimation de D_K est obtenue en utilisant les deux premiers moments de la distribution des cordes.

$$D_K = \frac{1}{3} < v > \left(\frac{< d^2 >}{2 < d >} - \beta < d > \right) \tag{5.5}$$

où β est une constante dépendante du type des réflexions sur les parois. Lorsque ces réflexions sont diffuses, $\beta = \frac{4}{13}$.

5.1.3 Diffusion mixte

La diffusion mixte est un régime de diffusion où se produisent simultanément des collisions molécules-molécules ou molécules-parois. Cette diffusion est également caractérisée par un coefficient de diffusion D_m, associé à la phase conductrice (espace poral). Pour l'utiliser dans les équations macroscopiques de transport des gaz, il faut en faire la moyenne sur la totalité du volume du milieu poreux (y compris la partie solide où la diffusivité est nulle). Cette moyenne $< D_m >$ est calculée en multipliant le coefficient de diffusion mixte D_m par la porosité ϵ du milieu.

$$< D_m >= \epsilon \ D_m \tag{5.6}$$

Pour définir D_m, il faut introduire la notion de fréquence de collision. La fréquence des collisions molécules-molécules est :

$$F_c(m) = \frac{< v >}{< \lambda >} \tag{5.7}$$

et celle des collisions molécules-parois est :

$$F_c(p) = \frac{< v >}{< d >} \tag{5.8}$$

La fréquence totale de collision est la somme des deux :

$$F_c(t) = F_c(m) + F_c(p) \tag{5.9}$$

Les coefficients de diffusion binaire et de diffusion de Knudsen peuvent s'écrire en fonction de ces fréquences :

$$D_b = \frac{1}{3}\frac{< v >^2}{F_c(m)} \ et \ D_K = \frac{1}{3}\frac{< v >^2}{F_c(p)} \tag{5.10}$$

Le coefficient de diffusion mixte est défini de la même manière :

$$D_m = \frac{1}{3}\frac{< v >^2}{F_c(t)} \tag{5.11}$$

d'où $D_m^{-1} = D_b^{-1} + D_K^{-1}$. Cette expression est similaire à l'addition des résistances en série dans un circuit électrique.

5.1.4 Nombre de Knudsen

La diffusion des gaz dans un milieu micro-poreux est caractérisée par le nombre de Knudsen Kn. La valeur de ce nombre indique la diffusion dominante entrant en jeu. Un Kn petit indique que la diffusion est plutôt binaire tandis qu'un Kn grand indique que l'on a une diffusion plutôt de Knudsen.

Le nombre de Knudsen est donné par :

$$Kn = \frac{<\lambda>}{<d>} = \frac{D_b}{D_K} \tag{5.12}$$

5.1.5 Influence de la géométrie sur la diffusion : facteur de forme et tenseur de diffusion

Les coefficients présentées dans les paragraphes précédents sont des coefficients idéaux. Ils ne prennent pas totalement en compte l'influence de la géométrie du milieu sur la diffusion du gaz. Cette influence est quantifiée par l'écart entre la moyenne $< D_m >$ du coefficient de diffusion théorique et le coefficient de diffusion effectif D^{eff} calculé. Elle est exprimée par le facteur de forme F :

$$F = \frac{D^{eff}}{< D_m >} \tag{5.13}$$

En général, F est inférieur à 1, ce qui présente une atténuation du transport par la géométrie. Tout se passe comme si les pores sont plus longs que la distance entre leurs extrémités, c'est à dire qu'ils sont tortueux. On définit donc la tortuosité $\tau = F^{-1}$.

De plus, un milieu anisotrope peut, par sa géométrie, induire une diffusion anisotrope des gaz. Pour mesurer cette anisotropie, il est nécessaire de remplacer le coefficient de diffusion scalaire par un tenseur de diffusion symétrique d'ordre 2.

$$\mathbf{D^{eff}} = \begin{pmatrix} D^{eff}_{x^2} & D^{eff}_{xy} & D^{eff}_{xz} \\ D^{eff}_{xy} & D^{eff}_{y^2} & D^{eff}_{yz} \\ D^{eff}_{xz} & D^{eff}_{yz} & D^{eff}_{z^2} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Le but de la simulation est de déterminer les D^{eff}, et, par comparaison avec les diffusivités calculables *a priori*, de donner donner des facteurs de formes. Ces facteurs sont utilisables tels quels par d'autre types de transport : conduction de l'électricité, conduction de la chaleur.

5.1.6 Calcul du coefficient effectif de diffusion D

Il existe une relation entre le coefficient de diffusion effectif et la variance des déplacements ξ d'une population de N molécules, dans la limite d'un temps t assez grand :

$$D^{eff} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{6}\frac{var(\xi)}{t} \tag{5.15}$$

Dans un cas anisotrope, une relation similaire existe entre chaque composante du tenseur de diffusion et la covariance des déplacements ξ_i sur chaque axe.

$$D_{ij}^{eff} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\frac{cov(\xi_i,\xi_j)}{t} \quad avec \quad (i,j) \in \{x,y,z\}^2 \tag{5.16}$$

Pour calculer le coefficient effectif de diffusion et le tenseur de diffusion, il suffit donc de suivre pendant un temps suffisamment long le déplacement d'une population de molécules de gaz dans le milieu micro-poreux [TS93]. Ceci n'est valable que si la moyenne des déplacements ξ des molécules est nulle, c'est à dire quand il n'y a pas de transport convectif du gaz dans le milieu.

5.2 Conditionnement des données initiales

Nous disposons initialement d'une image 3D de la densité du milieu micro-poreux. Cette image peut être obtenue par microtomodensimétrie X d'un milieu réel, ou par résonance magnétique nucléaire de gaz polarisés, ou encore par coupes sériées. Il s'agit donc d'informations volumiques qui doivent être transformées en une description surfacique du milieu : la connaissance de la surface des parois des pores est nécessaire afin de déterminer facilement les intersections des molécules de gaz avec les parties solides du milieu. Pour cela, on effectue une facettisation du milieu. Ensuite, deux opérations sont nécessaires pour optimiser le déplacement des molécules :

- le partitionnement spatial du milieu, de manière à ce qu'un marcheur aléatoire n'ait à sonder qu'un environnement localisé.
- le calcul d'une image de distance 3D sur le milieu facettisé, afin de fournir une information à plus grande échelle sur le milieu.

5.2.1 Facettisation du milieu

Une première approche a consisté à considérer un milieu comme étant formé de cubes, mais dans ce cas, il n'est pas possible de déterminer correctement la surface spécifique S_V, ni d'ailleurs l'orientation des normales de la surface échantillonnée [STA93]. Dans [Vig95], le milieu est décrit par des des listes de facettes triangulaires ou quadrangulaires dont les sommets sont aux noeuds de la grille. Cette approche permet de mieux estimer la surface spécifique du milieu et la normale en un point quelconque de la paroi. Cette méthode n'est cependant pas très adaptée aux milieux présentant de fortes variations de courbure.

La transformation de données volumiques en données surfaciques a donné lieu à de nombreux travaux en synthèse d'image, notamment en imagerie médicale. Nous pouvons utiliser ces travaux pour effectuer une facettisation plus souple et plus précise. Nous avons eu recours aux méthodes dites d'isosurface [MS93][LC87][Las92][Wal91][DR95]. Elles créent des surfaces dont les point ont tous une même valeur dans le volume, appelée seuil. Ces méthodes fournissent une représentation explicite de la surface de l'objet étudié sous forme d'un ensemble de facettes. Les sommets des facettes sont obtenus par la recherche de l'intersection de l'isosurface correspondant à un seuil donné avec la grille 3D de densité.

Ces méthodes fonctionnent globalement selon le schéma suivant : on recherche les points d'intersection entre la surface des parois et les arêtes de la grille de densité (l'image 3D). Ces points d'intersection seront alors pris comme sommets des facettes composant la surface. Un point de la surface de l'objet est sur une arête de la grille de données si le seuil est de valeur comprise entre les valeurs des deux extrémités de l'arête. La position du point d'intersection sur l'arête est calculée par interpolation linéaire.

Les diverses méthodes existantes diffèrent par la manière de parcourir la grille et de créer les arêtes de la surface, puis les facettes définies par ces arêtes.

Nous avons utilisé pour notre simulation la méthode de Wallin [Wal91]. Celle-ci comporte trois phases :

- la génération des arêtes de la surface,
- la génération des polygones constituant la surface à partir des arêtes,
- la transformation des polygones en facettes triangulaires.

La génération des sommets et des arêtes se fait simultanément en parcourant la grille de données par tranches 2D successives. A chaque étape, deux tranches adjacentes sont conservées en mémoire. On peut considérer ces deux tranches comme une plaque formée de cubes où les données placées sur aux sommets. Si l'isosurface traverse une face d'un cube, les points d'intersection et les arêtes correspondantes sont créés. Pour éviter les calculs redondants, on ne teste que trois des faces du cube. Chaque arête de la surface est alors transformée en deux arêtes orientées en sens inverse l'une de l'autre. Ceci sera utilisé pour obtenir la décomposition polygonale de la surface.

Pour construire un polygone, les arêtes orientées qui se trouvent à l'intérieur d'un cube de la grille sont chaînées par leurs sommets. Pour qu'une arête soit rattachées à un chaînage, il faut tout d'abord que son origine soit la même que l'extrémité de la dernière arête du chaînage. De plus son origine doit appartenir à une face perpendiculaire à la face du cube contenant la dernière arête du chaînage (pour construire un polygone à l'intérieur d'un cube). Enfin, son arête inverse ne doit pas être connectée avec l'arête inverse de la dernière arête du chaînage (pour éviter de suivre le même polygone dans un sens puis dans l'autre). Pour traiter toutes les arêtes, on utilise une pile d'arêtes non chaînées, initialisée avec une arête quelconque. Pour construire un polygone de la surface , on dépile une arête et on connecte cette arête avec une arête qui convient. L'arête à ajouter au chaînage est recherchée dans la pile, puis, si elle n'a pas été trouvée, dans la table contenant l'ensemble des arêtes. Si la nouvelle arête est extraite de cette table, son arête complémentaire est empilée. Pour construire un polygone, l'algorithme débute par l'arête située en tête de pile. De cette manière, la surface s'étale progressivement.

La décomposition des polygones en facettes triangulaires s'effectue à l'aide d'un algorithme récursif. Un triangle est créé à partir des deux premières arêtes du polygone. Une nouvelle arête est crée, reliant le premier point de la première arête et le second point de la deuxième arête. Cette nouvelle arête est alors considérée comme la dernière arête du polygone. Cet algorithme est appliqué sur le nouveau polygone ainsi défini. Il s'interromp dès qu'il ne reste que trois arêtes.

5.2.2 Déplacement des molécules

5.2.2.1 Déplacement microscopique et partitionnement spatial

Les molécules de gaz se déplacent incrémentalement dans le milieu, par des pas microscopiques de longueur variable. A chaque pas, elles heurtent, soit la paroi d'un pore, soit une autre molécule de gaz. Elles sont alors déviées dans une autre direction. Pour éviter de tester à chaque pas l'intersection des molécules avec toutes les facettes composant les parois des pores, il est nécessaire d'effectuer un partitionnement spatial du milieu.

De nombreuses techniques de partitionnement spatial ont été proposées en synthèse d'images : les octrees [Gla84], les grilles uniformes [FTI86] ou non uniformes [JW89] de voxels, les pyramides sphériques [Spe92], les parts cylindriques [Sub95]...

Nous avons choisi d'utiliser dans notre implémentation une grille uniforme de voxels (Figure 5.1). Cette structure de partitionnement allie simplicité et efficacité. Les facettes composant la surface du milieu sont attribuées à tous les voxels qu'elles traversent.

5.2.2.2 Déplacement macroscopique et images de distances

La longueur des pas entre deux collisions molécule-molécule peut être dans certains cas très petite par rapport à celle des pores ($Kn \to 0$). Dans ce cas, le déplacement microscopique de la molécule est très coûteux à simuler. Il existe une technique permettant de remplacer ce grand nombre de déplacements microscopiques par un seul déplacement macroscopique. Cette technique requiert simplement de connaître une sphère centrée sur la molécule et ne contenant pas de facettes. On peut alors déplacer en un seul pas la molécule

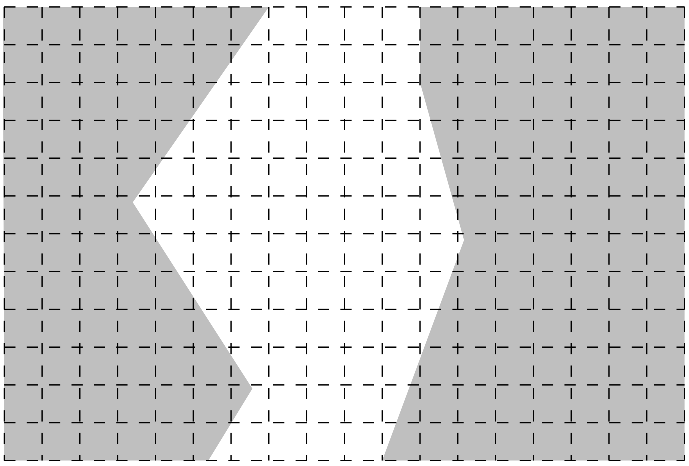


Figure 5.1 : Grille uniforme de voxel

sur un point quelconque de la surface de la sphère. Tous les points de la surface sont équiprobables. Pour calculer efficacement ces voisinages sphériques, nous pré-calculons une image de distance 3D du milieu micro-poreux.

Calcul de la distance minimale voxel-facettes

Pour déplacer macroscopiquement une molécule, il faut connaître le rayon R d'une sphère ne contenant aucune facette, centrée sur la molécule. Pour que l'efficacité du déplacement soit maximale, cette sphère doit être la plus grande possible, c'est à dire être tangente à la facette la plus proche de la molécule. Or, même en utilisant les propriétés du partitionnement spatial, la recherche de cette "facette la plus proche" est extrêmement coûteuse : il faut explorer tout d'abord les voxels se trouvant autour de la position de la molécule et calculer pour chacun de ces voxels la distance de la molécule aux facettes qu'il contient. De plus, si aucun de ces voxels ne contient de facette, il faut étendre l'exploration.

Plutôt que de calculer le rayon R de la sphère à chaque déplacement macroscopique d'une molécule, nous allons remplacer ce calcul par un calcul préalable, effectué une fois pour toute sur l'ensemble du milieu. Pour chaque voxel vide de la grille du partitionnement spatial, nous calculons la distance euclidienne minimale du centre de ce voxel au voxel le plus proche contenant au moins une facette. Si le voxel contient lui-même des facettes, la distance est nulle. Cet ensemble de distance constitue une image de distance 3D du milieu. Lorsqu'une molécule est dans un voxel vide, nous pouvons calculer très facilement le rayon R d'une sphère centrée sur la molécule et ne contenant pas de facettes. Ce rayon R n'est pas maximal, mais cette légère perte d'efficacité est négligeable comparée au gain de temps obtenu grâce à ce calcul préalable.

Le calcul de la distance euclidienne minimale du centre des voxels à un voxel contenant au moins une facette est effectué en deux étapes. Tout d'abord, on calcule pour chaque voxel la distance de chanfrein jusqu'aux voxels les plus proches contenant des facettes. Cette distance, qui est une approximation de la distance euclidienne, est définie au paragraphe suivant. Elle ne peut être utilisée pour les déplacements macroscopiques des molécules.

Les distances de chanfrein sont ensuite converties en distances euclidiennes.

Calcul de l'image de distance de chanfrein

Une distance de chanfrein est une distance définie par un ensemble fini de déplacements élémentaires autorisés à chacun desquels est associée une longueur élémentaire [Mor95]. La distance de chanfrein entre deux points P et P' est la longueur du plus court chemin joignant P et P', constitué uniquement de déplacements élémentaires autorisés. Cette longueur correspond à la somme des longueurs élémentaires associées respectivement à chacun des chemins élémentaires qui constituent ce chemin. Par exemple, en dimension 2, la distance d_4 est une distance de chanfrein pour laquelle les seuls déplacements élémentaires autorisés sont les déplacements horizontaux et verticaux à chacun desquels est associée la longueur élémentaire 1. Comme nous calculons une image de distance en dimension 3, nous utilisons la distance 3D d_6, pour laquelle les déplacements élémentaires sont les déplacements horizontaux, verticaux et en profondeur. Chacun de ces déplacements a une longueur élémentaire 1.

Nous calculons pour chaque voxel la distance de chanfrein d_6 minimale jusqu'à un voxel contenant des facettes (Figure 5.2).

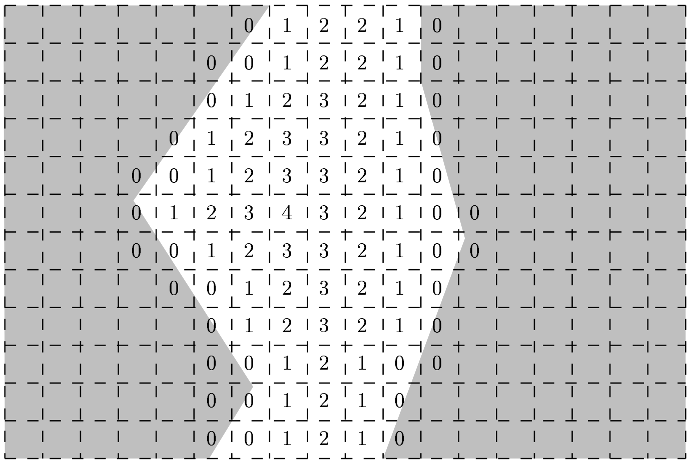


Figure 5.2 : Exemple d'image de distance d_4 sur un milieu 2D

L'algorithme utilisé pour calculer l'image de distance est une extension 3D de l'algorithme séquentiel proposé dans [RP66]. Cette algorithme est donné en annexe. Il permet, pour chaque voxel, de conserver la liste des voxels qui sont à une distance d_6 égale à l'image de distance calculée pour le voxel.

Calcul des distances euclidiennes

Une fois calculée l'image de distances, la liste de voxels est parcourue pour calculer la distance euclidienne associée. Pour chaque voxel, on calcule la distance euclidienne minimale du centre de ce voxel au point le plus proche de chacun des voxels de la liste.

5.3 Calcul des propriétés géométriques du milieu

5.3.1 Surface spécifique S

Le milieu étant facettisé, nous avons immédiatement sa surface spécifique S_V. C'est la somme des surfaces des facettes composant le milieu, divisée par son volume.

5.3.2 Porosité ϵ

Si la surface spécifique est facilement calculable, il n'en est pas de même pour la porosité. Notre calcul exact de la porosité est remplacé par une approximation obtenue par une méthode de Monte Carlo : on échantillonne aléatoirement N points dans le milieu micro-poreux et on regarde pour chacun d'entre eux s'il est dans un pore ou dans la matière. La porosité ϵ est alors donnée par la relation :

$$\epsilon = \frac{Nombre\ d'\acute{e}chantillons\ dans\ les\ pores}{Nombre\ total\ d'\acute{e}chantillons} \tag{5.17}$$

La variance dans le calcul de ϵ est fortement diminuée par l'utilisation d'un échantillonnage stratifié des points du milieu.

5.3.3 Coefficient de diffusion D

Le calcul du coefficient de diffusion D_m nécessite le calcul de la distance moyenne $< d >$ entre deux collisions molécules-parois (Equation 5.11). Celle-ci peut être estimée selon deux méthodes :

- en utilisant la porosité ϵ et la surface spécifique S_V du milieu (Equation 5.4).
- en utilisant la distribution des cordes des pores (Equation 5.5). Cependant, dans un milieu micro-poreux arbitraire, cette distribution n'est pas connue. Elle peut être, là encore, approximée par une méthode de Monte Carlo. On échantillonne aléatoirement N cordes du milieu et on calcule la moyenne de leur longueur $< d >$ et la moyenne des carrés de leur longueur $< d^2 >$. Chaque corde est échantillonnée en tirant aléatoirement un point P sur une surface et une direction V dans l'hémisphère de cette surface. Le deuxième point P' de la corde est déterminé par l'intersection avec la surface du pore du rayon de direction V issu de P.

5.4 Simulation de la diffusion

5.4.1 Calcul du coefficient effectif de diffusion D

Le déplacement des molécules est réalisé à l'aide d'une simulation de Monte Carlo. Chaque molécule est placée aléatoirement dans le milieu. Elle effectue ensuite une marche aléatoire, changeant de direction lorsque elle heurte une autre molécule de gaz ou la paroi d'un pore. La marche aléatoire de la molécule se termine lorsque le temps de simulation choisi est écoulé.

Le temps de simulation t est divisé en n intervalles réguliers $t_i,\ i \in [1, n]$. Durant la simulation, le coefficient de diffusion et le tenseur de diffusion sont estimés à chacun de ces intervalles. Il faut donc calculer pour chaque intervalle :

- la moyenne et la variance du carré des déplacements des molécules pour estimer le coefficient de diffusion.
- les moyennes et les variances des produits des déplacements des molécules sur chaque axe pour estimer le tenseur de diffusion.

Le graphe de la valeur du coefficient de diffusion en fonction du temps permet de vérifier que le temps de simulation t est suffisamment grand pour que la simulation puisse converger vers un résultat correct.

Le déplacement des molécules de gaz est conditionné par deux choses : d'une part, le déplacement dans le volume occupé par le gaz, d'autre part, la réflexion des molécules sur la surface des pores.

5.4.2 Déplacement dans un volume

5.4.2.1 Déplacements microscopiques

Dans un gaz libre, les molécules de gaz se déplacent à une vitesse moyenne $< v >$ (vitesse d'agitation moléculaire). Lors de ce déplacement, elles se heurtent aux autres molécules et sont déviées par celles-ci dans une nouvelle direction. Ce processus de déplacement-choc-déviation se traduit par un déplacement global de la molécule suivant un mouvement brownien aléatoire [BDMP88] (Figure 5.3).

La distribution des libres parcours (distance entre deux collisions molécule-molécule) suit une loi exponentielle décroissante :

$$p_\lambda(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{<\lambda>}} \tag{5.18}$$

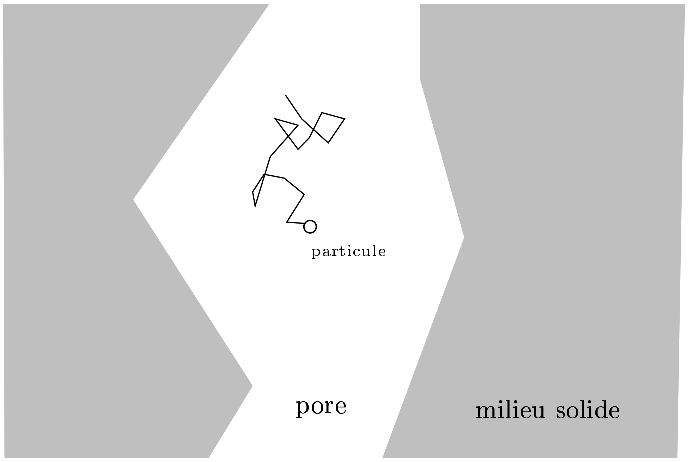


Figure 5.3 : Déplacement microscopique

où $< \lambda >$ est le libre parcours moyen.

Lorsqu'une molécule heurte une autre molécule, elle est déviée dans une direction aléatoire V. La probabilité d'être déviée dans une direction V est constante :

$$p_V(V) = \frac{1}{4\pi} \tag{5.19}$$

Le déplacement d'une molécule de gaz dans un volume correspond donc à une marche aléatoire. On tire pour chaque pas de la marche une direction V selon la fonction de densité de probabilité p_V et une longueur de déplacement λ selon la fonction de distribution p_λ. Comme toutes les molécules ont la même vitesse moyenne d'agitation $< v >$, le temps écoulé pour effectuer un pas est $t_{pas} = \frac{\lambda_{pas}}{<v>}$.

5.4.2.2 Déplacement macroscopiques

Lorsque le nombre de Knudsen Kn est très petit, le régime de diffusion est essentiellement binaire. Le libre parcours moyen $< \lambda >$ est très inférieur à la distance moyenne $< d >$ entre deux collisions molécules-parois. Les molécules de gaz s'entrechoquent très fréquemment et ne touchent que très rarement les parois des pores. Ce type de déplacement implique lors de la simulation un très grand nombre de pas de très faible longueur et donc une progression très lente de la molécule dans le temps de la simulation.

Tant qu'une molécule interagit uniquement avec les autres molécules de gaz, on peut modéliser son mouvement non plus de manière microscopique, mais de manière macroscopique. Etant donné une sphère de rayon $R \gg \lambda$, centrée sur la molécule et ne contenant que du gaz, il est possible de connaître le temps τ que mettra cette molécule pour atteindre un point quelconque de la surface de cette sphère. Ce temps, appelé temps de premier passage, est une variable aléatoire, dont la fonction de distribution cumulative p_τ est calculée à partir d'une fonction $P(\tau, x, R)$. Cette fonction exprime la probabilité

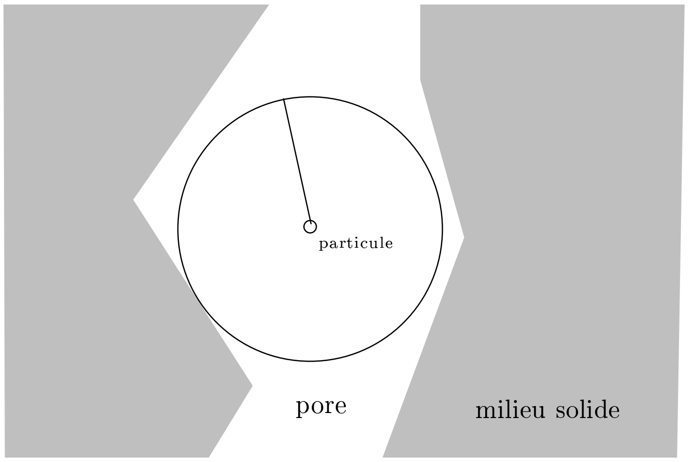


Figure 5.4 : Déplacement macroscopique

qu'une molécule de gaz située à une distance x de centre d'une sphère de rayon R atteigne la surface de cette sphère en un temps τ. La fonction $P(\tau, x, R)$ obéit à l'équation de diffusion suivante [ZC89] :

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = D\nabla^2 P = D\left(\frac{2}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right) \tag{5.20}$$

avec les conditions limites suivantes :

$$P(\tau = 0, x, R) = 0 \tag{5.21}$$

$$P(\tau, x = R, R) = 1 \tag{5.22}$$

La fonction de distribution cumulative de la molécule positionnée au centre de la sphère est :

$$p_\tau(\tau) = P(t < \tau, x = 0, R) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{Dn^2\pi^2\tau}{R^2}} \tag{5.23}$$

Le déplacement macroscopique d'une molécule s'effectue en déterminant un rayon R pour la sphère centrée sur la molécule grâce à la technique d'image de distance déjà exposée. La molécule est alors positionnée aléatoirement sur la surface de la sphère (Figure 5.4) et son temps de déplacement τ est obtenu aléatoirement en utilisant la fonction de distribution cumulée p_τ.

5.4.3 Réflexion sur les surfaces

Lorsqu'une molécule touche la paroi d'un pore, elle est réfléchie dans une direction aléatoire dont la fonction de densité de probabilité p_V est la même que la fonction P utilisée pour la réflexion isotrope des photons (Equation 3.30 et Figure 5.5) :

$$p_V(V) = \frac{N.V}{\pi} \tag{5.24}$$

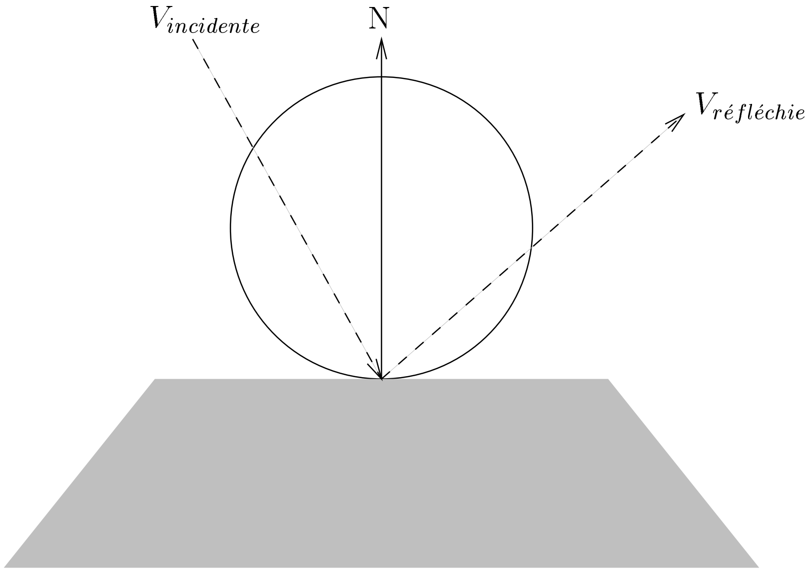


Figure 5.5 : Fonction de distribution angulaire des réflexions sur une surface

où N est la normale à la surface et V est la direction de réflexion. Cette probabilité respecte le principe de réversibilité microscopique : la distribution des angles émergents est égale à la distribution des angles incidents. Dans la simulation, la réflexion d'une molécule se fait simplement en tirant un nouvelle direction suivant cette fonction de densité de probabilité.

5.4.4 Sortie du milieu micro-poreux

L'image 3D du milieu à partir de laquelle nous travaillons est réalisée à partir d'un échantillon de petite taille du milieu micro-poreux réel. Cette image utilisée par la simulation est généralement trop petite : les molécules en sortent au bout d'un temps trop court pour que les résultats de la simulation soient significatifs.Il faut donc gérer le cas de la sortie par les bords du milieu pour que les molécules puissent continuer leur déplacement jusqu'à la fin de la simulation. Ceci revient à répéter dans l'espace l'image dont nous disposons lorsque une molécule touche un bord du milieu. Deux systèmes de coordonnées sont nécessaires pour suivre la molécule. Le premier, local, indique la position réelle de la molécule dans l'échantillon. Le second, global, donne la position que devrait avoir la molécule si le milieu était suffisamment grand. Ce sont ces coordonnées globales qui sont utilisées pour effectuer les calculs du tenseur des coefficients de diffusion.

5.4.4.1 Répétition du milieu par symétrie

Une première méthode consiste à effectuer une réflexion spéculaire de la molécule sur le bord de l'échantillon. Ceci revient à considérer que le milieu est symétrique par rapport

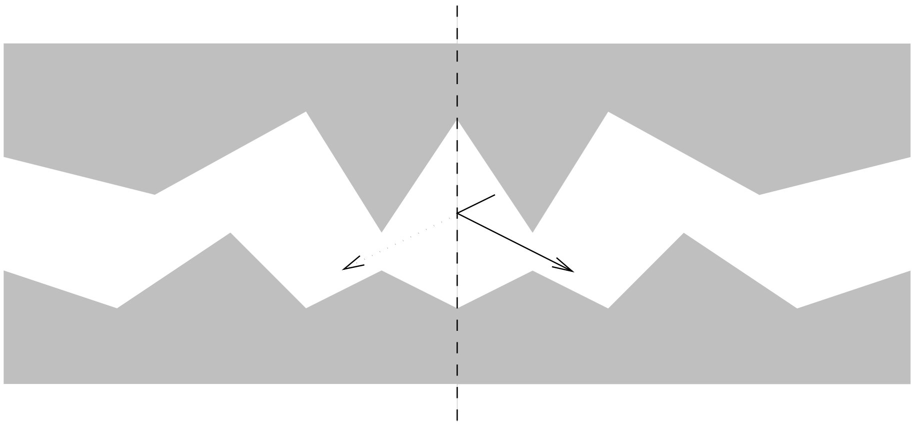


Figure 5.6 : Répétition du milieu par symétrie

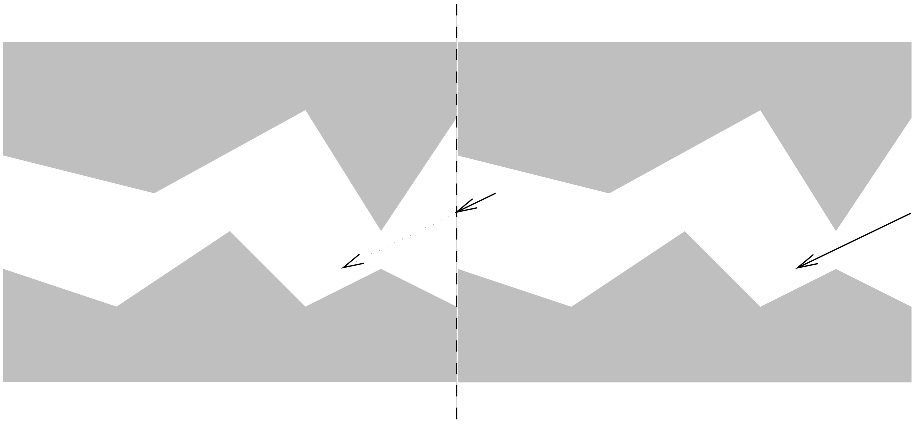


Figure 5.7 : Répétition du milieu par translation

à ce bord (Figure 5.6).

5.4.4.2 Répétition du milieu par translation

Une deuxième technique consiste à placer la molécule sur le bord opposé au bord rencontré par la molécule. Ceci simule la mise bout à bout du même échantillon (Figure 5.7).

Il faut cependant veiller à ce que la molécule soit replacée dans un pore sur le bord opposé et non pas dans la matière. De plus, si les deux faces du milieu n'ont pas exactement la même porosité surfacique, la probabilité de passage de la face A à la face B est différente de la probabilité de passage dans le sens contraire. Ceci amène un comportement de "filtrage orienté" qui fait apparaître de la convection là où il n'y en a pas. Pour pallier ce problème, il faut prendre en compte la différence de porosité des deux faces opposées $(\epsilon_{max} - \epsilon_{min})$. Lorsqu'une molécule sort par la face la moins poreuse, un nombre aléatoire uniforme est tiré entre 0 et ϵ_{max}. Si celui-ci est supérieur à ϵ_{min}, la molécule est reflétée spéculairement.

5.4.5 Algorithme de la simulation

L'algorithme de la simulation est le suivant :

```
Pour chaque molécule Faire
    Positionner la molécule dans le milieu
    Pour chaque intervalle de temps
    Faire
        Tant que le temps total de déplacement de la molécule < temps intervalle
        Faire
            Si la molécule est proche d'une paroi Alors
                Utiliser le déplacement microscopique
                Si elle heurte la paroi Alors
                    Effectuer une réflexion isotrope.
            Sinon
                Utiliser le déplacement macroscopique.

            Calculer le temps t nécessaire au déplacement effectué
            Si (t + le temps total de déplacement) > temps intervalle Alors
                Réajuster le déplacement par interpolation pour obtenir
                (t + le temps total de déplacement) = temps intervalle

            Si la molécule est arrivée sur un bord du milieu Alors
                Ajuster les coordonnées locales et globales de la molécule et
                continuer le déplacement.
Fin.
```

5.5 Résultats

5.5.1 Temps de calcul

Le tableau suivant récapitule les temps d'exécution en secondes pour plusieurs simulations, avec des temps de simulations adimensionnel différents. Comme nous pouvons le constater sur la figure 5.8, ces temps varient linéairement avec le temps de simulation. Ces simulations ont étés effectuées sur une Silicon Graphic Onyx 10000.

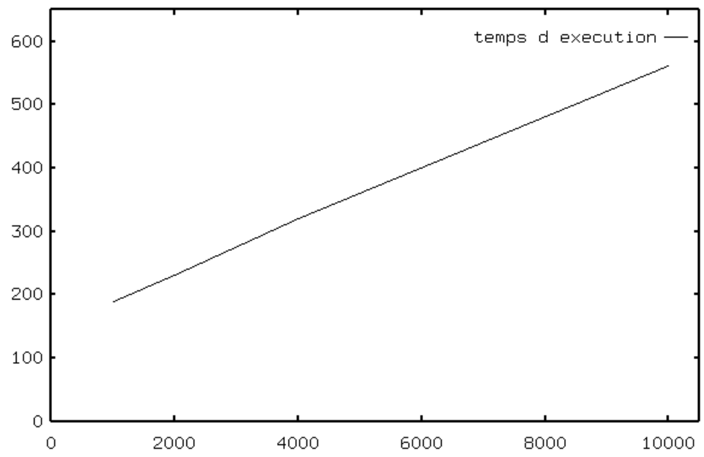


Figure 5.8 : Temps d'exécution des simulations

Molécules	Temps de simulation	Intervalles	Knudsen	Temps d'exécution
500	1000	50	1000	189
500	2000	50	1000	231
500	4000	50	1000	320
500	10000	50	1000	561

5.5.2 Résultats obtenus

La simulation produits des statistiques sur le déplacement des particules. On constate qu'au fil du temps de simulation, la moyenne des carrés des déplacements converge vers 6 fois le coefficient de diffusion effectif (Equation 5.15). Ces résultats sont proches de ceux calculés par la méthode proposée dans [Vig95]. Notre simulation semble donc converger vers une valeur correcte.

5.5.3 Précision des résultats

Les méthodes de Monte Carlo, de part leur nature stochastique, fournissent des résultats empreint d'une erreur. L'importance de cette erreur peut être évaluée par une suite de simulation consécutives sur les mêmes données. Le tableau suivant présente la moyenne et l'écart type du résultat obtenu pour une suite de 10 simulations.

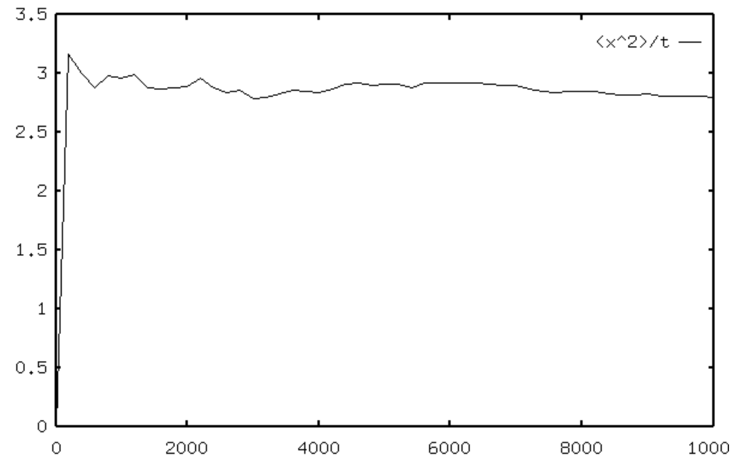


Figure 5.9 : Moyenne du carré des déplacements ($Kn = 0.6$, 600 particules)

Molécules	Temps Total	Coefficient de diffusion estimé (moyenne)	Ecart type
300	1000	0.4704	0.0626
300	5000	0.4727	0.0188
300	10000	0.46	0.0173
600	1000	0.4746	0.0429
600	5000	0.4733	0.0195
600	10000	0.4666	0.0160
900	1000	0.4799	0.0260
900	5000	0.4765	0.0145
900	10000	0.4697	0.0114

On peut constater que les écarts type sont petits dans tous les cas. Le programme produit des résultas stables d'une simulation à l'autre.

5.6 Conclusion

Notre approche de la simulation de la diffusion des gaz en milieu micro-poreux a abouti à la mise au point d'une méthode utilisant une description précise du milieu. Cette méthode combine les déplacements microscopiques près des parois des pores et macroscopiques au milieu des pores. Le partitionnement spatial du milieu et le calcul de l'image de distance permettent une implémentation efficace de ces déplacements.

Les premiers tests de la méthode ont validé sa bonne convergence vers les résultats attendus.

Cependant, cette méthode est toujours en cours de développement. Il est en particulier nécessaire d'améliorer la rapidité du calcul des déplacements microscopiques près des parois des pores. Il est possible de le faire en tenant compte du fait que, d'un pas à l'autre, une particule reste fréquemment dans le voisinage de la même facette.

5.7 Extensions

Durant la diffusion du gaz dans le milieu, il peut se produire une réaction chimique entre les molécules gazeuses et le milieu poreux. Cette réaction peut être une oxydation du milieu, une densification par dépôt chimique ou une catalyse. Dans tous les cas, la molécule est absorbée par le milieu en échange d'un avancement ou d'un recul de la paroi du pore et/ou d'une transformation de la molécule.

L'extension de la simulation à ce type de phénomènes permettrait d'étudier non seulement la diffusion du gaz dans le milieu, mais aussi l'évolution de la topologie du milieu au cours du temps.

Une seconde perspective est la simulation de la diffusion dans les milieux multiphasés, c'est à dire les milieux hétérogènes constitués de plusieurs phases dans lesquelles les propriétés de transport diffusif sont différentes.

Conclusion

L'objectif de notre étude était double : d'une part développer une méthode complète de rendu utilisant une simulation de Monte Carlo, d'autre part étudier les applications de cette méthode à d'autres domaines. Notre travail s'est donc divisé en deux parties.

Dans un premier temps, nous avons travaillé sur une simulation de Monte Carlo d'un modèle particulaire de la lumière. Cette simulation n'est pas limitée aux interactions purement diffuses ou spéculaires de la lumière avec la matière. Elle utilise des fonctions de réflectance et de transmittance généralisées pour les objets surfaciques et des fonctions de phase pour les objets volumiques. Afin de diminuer la variance de la méthode, nous utilisons un échantillonnage d'importance de ces fonctions pour déterminer la direction de propagation des photons. Cet échantillonnage constitue le coeur de la simulation : il est utilisé à chaque interaction photon-matière. Nous avons donc pris soin d'utiliser une technique rapide pour effectuer cet échantillonnage. Nous avons choisi des fonctions de réflectance et des fonctions de phases permettant l'utilisation de la technique de transformation de variables aléatoires. Enfin, nous avons proposé une nouvelle technique, le regroupement de photons, permettant de conserver une efficacité constante tout au long de la simulation et de limiter l'utilisation de la technique de la roulette russe. La simulation dans les objets volumiques prend en compte les diffusions multiples. Pour diminuer la variance, nous effectuons un calcul précis de l'absorption de la lumière par l'objet. Enfin, nous avons développé un stockage des luminances permettant de conserver les détails géométriques de l'objet même lorsque la définition de la grille optique est inférieure à celle de la grille géométrique.

Nous avons ensuite utilisé cette méthode de rendu pour visualiser des champs scalaires tri-dimensionnels. Nous effectuons une bijection entre le champ scalaire à visualiser et un milieu participant. Le rendu réaliste de ce milieu, avec ses ombres portées, permet d'interpréter plus intuitivement l'image obtenue.

Finalement, nous avons appliqué notre simulation de Monte Carlo à la diffusion des gaz dans un milieu micro-poreux. Nous avons introduit dans cette simulation des techniques issues de la synthèse d'image. Nous obtenons une description précise de la topologie du milieu grâce l'utilisation d'une méthode de facettisation de données volumiques. L'utilisation des images de distance et du partitionnement spatial permet de simuler efficacement les déplacements macroscopiques des molécules.

Le travail présenté dans ce document n'est pas clôs. Pour chacun des domaines étudiés, il reste des améliorations à apporter :

Dans notre méthode de rendu des milieux participants, les luminances sont stockées sur une grille régulière tri-dimensionnelle. Ce type de structure ne permet pas un suivi précis des discontinuités d'illumination dans le milieu. Il peut de plus provoquer des "fuites de lumière" lorsque des objets très lumineux sont plongés dans le milieu. Pour résoudre ces problèmes, il serait intéressant d'étudier un maillage adaptatif tri-dimensionnel pour stocker les luminances.

La technique de regroupement de photons peut aussi être étendue pour obtenir un échantillonnage constant des sources lumineuses, dépendant non seulement de la quantité d'énergie à émettre, mais aussi de la forme de la fonction de réémission.

Les fonctions de réflectance utilisées dans notre implémentation ne permettent pas un échantillonnage d'importance optimal des fonctions de réémission associées. Le développement d'un nouveau modèle de réflectance adapté à ce type d'échantillonnage permettrait d'améliorer la convergence la simulation.

Nous pouvons finalement citer les extensions proposées pour nos deux applications, *i.e* l'introduction de la couleur directement dans le modèle de rendu pour notre méthode de visualisation des champs scalaires 3D et, la prise en compte des réactions chimiques et des milieux multiphasés dans notre simulation de la diffusion des gaz.

Annexe A

Algorithme du calcul de l'image de distance 3D

Tout d'abord, la grille des images de distances est initialisée en donnant une image de distance égale à 0 aux voxels contenant des facettes et en donnant une distance de valeur infinie aux autres voxels. Puis, on effectue l'algorithme suivant :

```
Pour k allant de 0 à KMAX
    Pour j allant de 0 à JMAX
        Pour i allant de 0 à IMAX
            Si valeur[i][j][k] > valeur[i][j-1][k]+1
            Alors
                valeur[i][j][k] = valeur[i][j-1][k]+1
                mettre à jour la liste des voxels proches du voxel[i][j][k]
            Sinon
                Si valeur[i][j][k] = valeur[i][j-1][k]+1
                Alors
                    fusionner les deux listes
        Pour i allant de 1 à IMAX
            Si valeur[i][j][k] > valeur[i-1][j][k]+1
            Alors
                valeur[i][j][k] = valeur[i-1][j][k]+1
                mettre à jour la liste des voxels proches du voxel[i][j][k]
            Sinon
                Si valeur[i][j][k] = valeur[i-1][j][k]+1
                Alors
                    fusionner les deux listes
        Pour i allant de IMAX-1 à 0
            Si valeur[i][j][k] > valeur[i+1][j][k]+1
            Alors
                valeur[i][j][k] = valeur[i+1][j][k]+1
                mettre à jour la liste des voxels proches du voxel[i][j][k]
```

```
                Sinon
                        Si valeur[i][j][k] = valeur[i+1][j][k]+1
                        Alors
                                fusionner les deux listes
Pour j allant de JMAX-1 à 0
        Pour i allant de 0 à IMAX
                Si valeur[i][j][k] > valeur[i][j+1][k]+1
                Alors
                        valeur[i][j][k] = valeur[i][j+1][k]+1
                        mettre à jour la liste des voxels proches du voxel[i][j][k]
                Sinon
                        Si valeur[i][j][k] = valeur[i][j+1][k]+1
                        Alors
                                fusionner les deux listes
        Pour i allant de 1 à IMAX
                Si valeur[i][j][k] > valeur[i-1][j][k]+1
                Alors
                        valeur[i][j][k] = valeur[i-1][j][k]+1
                        mettre à jour la liste des voxels proches du voxel[i][j][k]
                Sinon
                        Si valeur[i][j][k] = valeur[i-1][j][k]+1
                        Alors
                                fusionner les deux listes
        Pour i allant de IMAX-1 à 0
                Si valeur[i][j][k] > valeur[i+1][j][k]+1
                Alors
                        valeur[i][j][k] = valeur[i+1][j][k]+1
                        mettre à jour la liste des voxels proches du voxel[i][j][k]
                Sinon
                        Si valeur[i][j][k] = valeur[i+1][j][k]+1
                        Alors
                                fusionner les deux listes
```

Ensuite, cet algorithme est répété en permutant circulairement le rôle de k, j et i.

Annexe B

Images et résultats

Dans cette annexe, nous présentons et commentons des images obtenues grâce à notre logiciel de rendu. Ces images ont été calculées sur une station de travail Silicon Graphics Onyx 10000.

B.1 Laser

Ces images représentent un milieu participant de densité constante, traversé de droite à gauche par un faisceau laser. Ce milieu est un parallélépipède rectangle. La densité relative du milieu est 0.04, son coefficient d'absorption k_a vaut 0.01, son coefficient de diffusion k_d vaut 0.5. La grille optique utilisée pour stocker la luminance a une définition de 128x64x64. Une seule valeur de luminance est stockée dans chaque voxel optique.

La source lumineuse a lancé 2031736 photons dans le milieu participant. Les temps de calcul de chacune des images est sensiblement le même : 17 minutes en moyenne. Le nombre moyen de diffusion par rayon varie légèrement selon la fonction de phase :

Image	Nombre moyen de diffusion
2.1	3.24
2.2	3.27
2.3	3.32
2.4	3.58

Nous pouvons constater sur les différentes images l'influence de la fonction de phase sur la diffusion de la lumière dans le milieu : plus la fonction est dirigée vers l'avant, plus la lumière pénètre dans le milieu participant. Les paramètres r, k et k' sont les paramètres de la fonction de phase décrite dans l'équation 1.35.

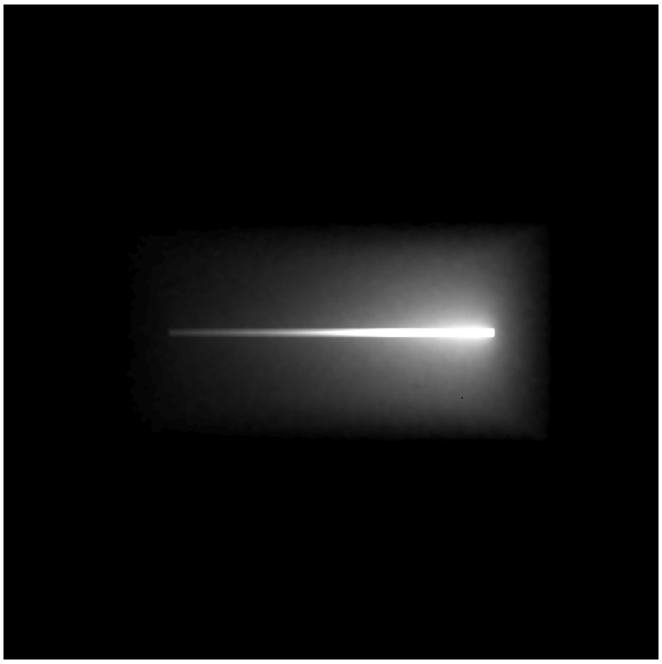


Figure 2.1 : Isotrope : $r = 0.5$, $k = -0.0$, $k' = 0.0$

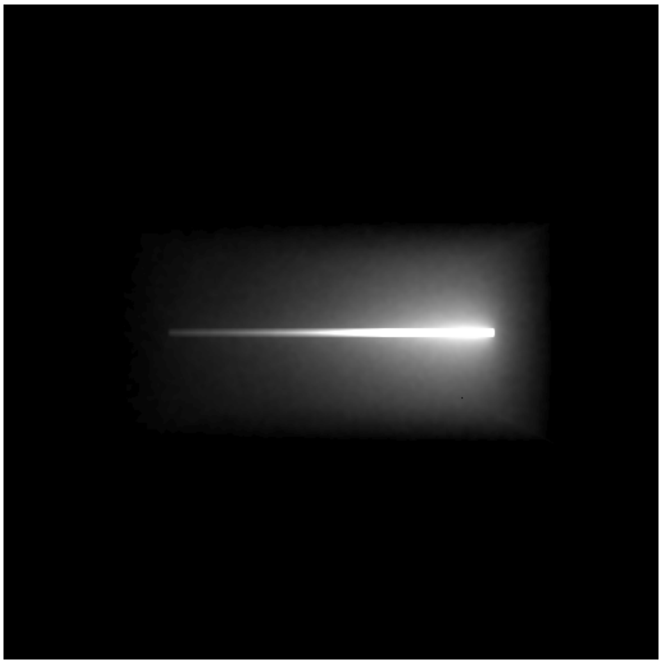


Figure 2.2 : Rayleigh : $r = 0.5$, $k = -0.46$, $k' = 0.46$

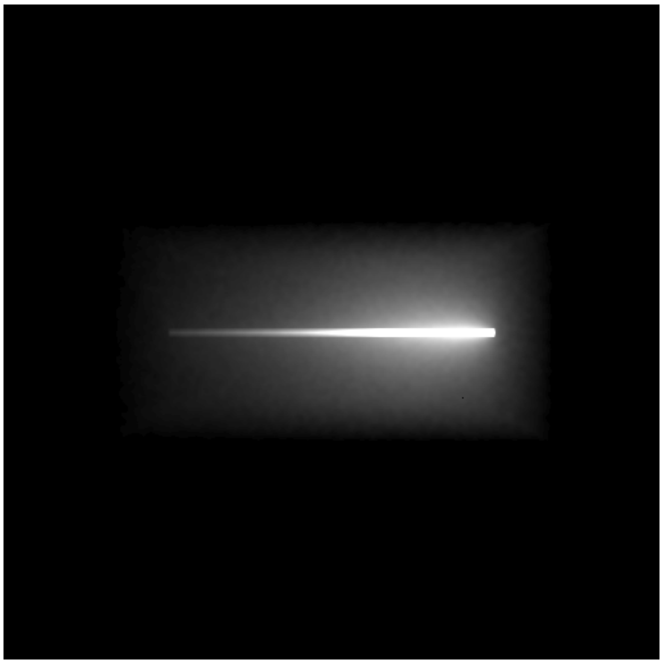


Figure 2.3 : Mie 1 : $r = 0.12$, $k = -0.5$, $k' = 0.7$

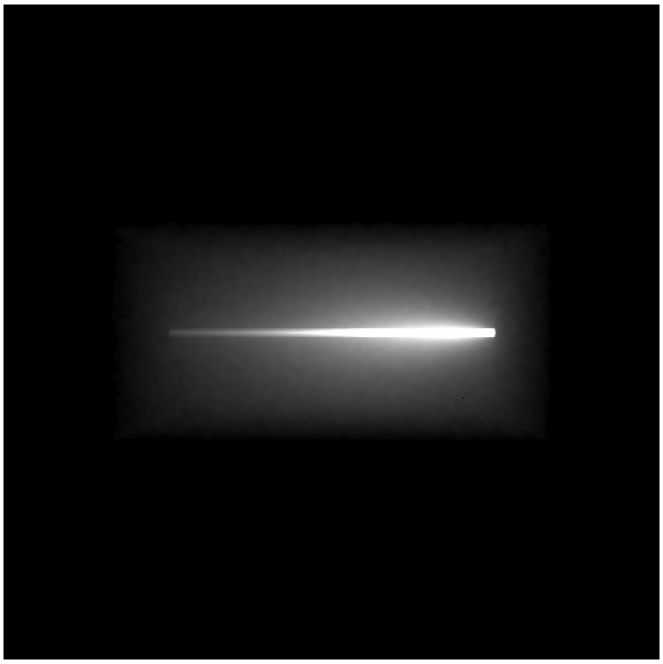


Figure 2.4 : Mie 2 : $r = 0.19$, $k = -0.65$, $k' = 0.91$

B.2 Bureau

La scène utilisée pour produire les images de cette section modélise un bureau (Figure 2.5). Les caractéristiques optiques de chacun des objets de la scène sont les suivantes :

Objet	Caractéristiques optiques
plafond	diffus
mur	diffus
sol	mixte et spéculaire
pied de la table	diffus
plateau de la table	mixte et spéculaire
lampe	mixte
réflecteur de la lampe	mixte et fortement spéculaire

La scène est éclairée par cinq sources lumineuses : une source isotrope placée au centre du réflecteur de la lampe et quatre sources directionnelles positionnées au plafond, simulant des spots. La source isotrope émet dans la scène 2.10^7 photons. Chacune des quatre sources directionelles émet 14.10^5 photons.

Les temps de calcul de chaque image sont les suivants :

Image	Temps de calcul
2.5	8 secondes
2.6	8 minutes 55 secondes
2.7	1 heure 11 minutes
2.8	4 heures 16 minutes

La figure 2.5 montre la scène avec une modèle de rendu simple, ne tenant pas compte des sources lumineuses.

Dans la figure 2.6, seules les illuminations directes ont été prises en compte. Le dessous de la table, le haut des murs et le plafond sont totalement plongés dans l'obscurité. On peut observer le caractère mixte de réflexion du sol : bien que les quatre sources directionnelles soient identiques, les taches lumineuses qu'elles produisent sur le sol n'ont pas la même taille selon notre angle de vue.

Lorsque la méthode a convergé et que nous avons pris en compte toutes les interactions lumineuses entre les objets, nous obtenons la figure 2.7. Le pied de la table a été éclairé par les murs, d'où sa teinte rosée. De même, le plafond a été éclairé par le plateau de la table, le sol et les murs.

Dans la figure 2.8, nous avons introduit dans la scène une atmosphère participante homogène avec une coefficient d'absorption k_a de 0.001 et un coefficient de diffusion k_d de

0.01. Sa fonctions de phase est la fonction *Mie2*, définie dans la section précédante. La grille optique utilisée pour stocker la luminance du milieu participant a une définition de 64x64x64. Une seule valeur de luminance est stockée dans chaque voxel optique. Nous pouvons observer les zones de l'atmosphère éclairées par les quatre sources directionnelles et la source isotrope. Les taches lumineuses sur le sol sont plus petites car une partie de la lumière provenant des sources directionnelles a été diffusée dans d'autres directions par le milieu participant.

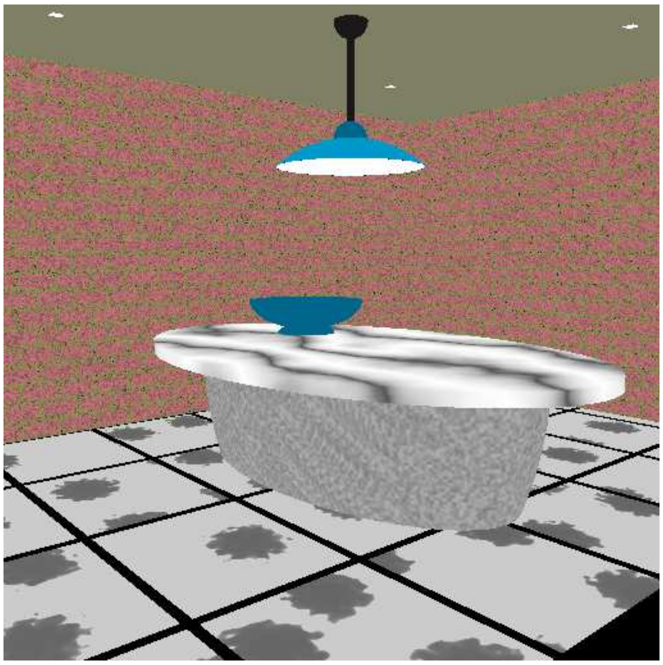


Figure 2.5 : Visualisation simple de la scène

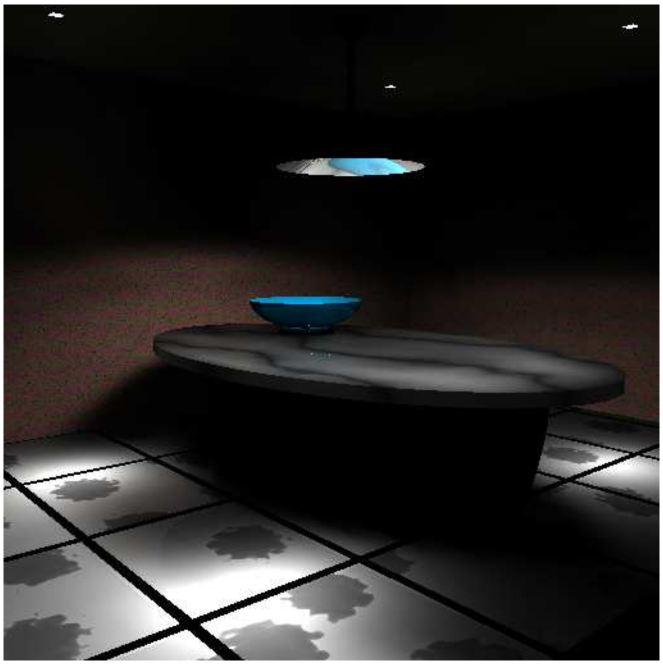


Figure 2.6 : Illumination directe

Figure 2.7 : Illumination complète

Figure 2.8 : Introduction d'une atmosphère participante homogène

B.3 Fumée

Pour cette image, nous avons conservé les murs, le sol et le plafond de la scène précédante. Nous avons introduit dans la pièce une poubelle et un milieu participant hétérogène, représentant une fumée sortant de la poubelle. Ce milieu est décrit par une grille géométrique de 65x65x129 voxels. La définition de la grille optique est la même, avec une seule valeur par voxel. La poubelle et la fumée sont éclairées par une source directionnelle émettant 28.10^5 photons. Le temps de calcul de cette image est de 31 minutes 24 secondes. Chaque photon subit en moyenne 1.31 diffusions.

Figure 2.9 : Fumée

124

Bibliographie

[AK90] J. Arvo and D. Kirk. Particle transport and image synthesis. In F. Baskett, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'90 Proceedings)*, volume 24, pages 63–66, August 1990.

[BDMP88] M. F. Barnsley, R. Devaney, B. Mandelbrot, and H-O Peitgen. *The science of fractal images*. Springer Verlag, 1988.

[Bli82] J. F. Blinn. Light reflection functions for simulation of clouds and dusty surfaces. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'82 Proceedings)*, volume 16, pages 21–29, July 1982.

[BLS92] P. Blasi, B. Le Saëc, and C. Schlick. Un algorithme d'illumination d'objets 3d définis par matrice de densité. In M. Lucas, editor, *Actes des Journées GROPLAN 92*, pages 9–21. GROPLAN, 1992.

[BLS93] P. Blasi, B. Le Saëc, and C. Schlick. A rendering algorithm for discrete volume density objects. In R. J. Hubbold and R. Juan, editors, *EUROGRAPHICS'93*, pages 201–210, Oxford, UK, 1993. Eurographics, Blackwell Publishers.

[BLS94a] P. Blasi, B. Le Saëc, and C. Schlick. An importance driven monte carlo solution to the global illumination problem. In *Fifth Eurographics Workshop on Rendering*, pages 173–183, Darmstadt, Germany, June 1994.

[BLS94b] P. Blasi, B. Le Saëc, and C. Schlick. A stochastic interpretation of bouguer's law for global illumination in participating media. In *10th Spring School on Computer Graphic*, Bratislava (Slovaquie), June 1994.

[BMG94] C. Rozé B. Matheu and G. Gréhan. Evaluations of the sighting distance in a foggy atmosphere by monte carlo simulation. *Atmospheric Environment*, 28(5), September 1994. 769-775.

[BPZ96] K. Bouatouch, S. N. Pattanaik, and E. Zeghers. Computation of higher order illumination with a nondeterministic approach. *Computer Graphics Forum*, 15(3), September 1996.

[BRB93] P. H. Getto B. Roysam, A. R. Cohen and P. R. Boyce. A numerical approach to the computation of light propagation through turbid media: Application to the evaluation of lighted exit signs. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 28(5), June 1993. 661-669.

[BS63] P. Beckmann and A. Spizzichino. *Scattering of Electromagnetic from Rough Surfaces.* Pergamon Press, 1963.

[Bus66] N. P. Buslenko. *The Monte Carlo method : the method of statistical trials.* Pergamon Press, 1966.

[BW97] P. Blasi and C. Wuethrich. A realistic rendering algorithm for an intuitive interpretation of smoothly varying 3d scalar fields. In *WSCG'97, The Fifth International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization 97*, Plzen, Czech Republic, February 1997.

[CCWG88] M. F. Cohen, S. E. Chen, J. R. Wallace, and D. P. Greenberg. A progressive refinement approach to fast radiosity image generation. In J. Dill, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'88 Proceedings)*, volume 22, pages 75–84, August 1988.

[CG85] M. Cohen and D. P. Greenberg. The hemi-cube: A radiosity solution for complex environments. In *Computer Graphics (ACM SIGGRAPH'85 Proceedings)*, pages 31–40, August 1985. Published as Computer Graphics (ACM SIGGRAPH'85 Proceedings), volume 19, number 3also in Tutorial: Computer Graphics: Image Synthesis, Computer Society Press, Washington, 1988.

[CMS87] B. Cabral, N. Max, and R. Springmeyer. Bidirectional reflection functions from surface bump maps. In M. C. Stone, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'87 Proceedings)*, volume 21, pages 273–281, July 1987.

[Coh94] D. Cohen. Voxel traversal along a 3D line. In P. Heckbert, editor, *Graphics Gems IV*, pages 366–369. Academic Press, Boston, 1994.

[CPC84] R. L. Cook, T. Porter, and L. Carpenter. Distributed ray tracing. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'84 Proceedings)*, volume 18, pages 137–145, July 1984.

[CS92] W. M. Cornette and J. G. Shanks. Physical reasonable analytic expression for the single-scattering phase function. In *Applied Optics*, volume 31, pages 3152–, August 1992.

[CT81] R. L. Cook and K. E. Torrance. A reflectance model for computer graphics. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'81 Proceedings)*, volume 15, pages 307–316, August 1981.

[DR95] I. Debled-Rennesson. *Reconnaissance des droites et plans discrets.* Ph.D. thesis, University Louis Pasteur, Strasbourg, France, December 1995.

[DW94] P. Dutre and Y. D. Willems. Importance-driven monte carlo light tracing. In *Fifth Eurographics Workshop on Rendering*, pages 185–194, Darmstadt, Germany, June 1994.

[EP90] D. S. Ebert and R. E. Parent. Rendering and animation of gaseous phenomena by combining fast volume and scanline A-buffer techniques. In F. Baskett, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'90 Proceedings)*, volume 24, pages 357–366, August 1990.

[FM85] H. Freeman and D. J. Meagher. Octrees: a data structure for solid-object modeling. pages 249–259, 1985.

[FTI86] A. Fujimoto, T. Tanaka, and K. Iwata. ARTS: Accelerated ray tracing system. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(4):16–26, 1986.

[Gar85] G. Y. Gardner. Visual simulation of clouds. In B. A. Barsky, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'85 Proceedings)*, volume 19, pages 297–303, July 1985.

[Gla84] A. S. Glassner. Space subdivision for fast ray tracing. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(10):15–22, October 1984.

[GTGB84] C. M. Goral, K. K. Torrance, D. P. Greenberg, and B. Battaile. Modelling the interaction of light between diffuse surfaces. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'84 Proceedings)*, volume 18, pages 213–222, July 1984.

[Hec90] P. S. Heckbert. Adaptive radiosity textures for bidirectional ray tracing. In F. Baskett, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'90 Proceedings)*, volume 24, pages 145–154, August 1990.

[HG41] L. G. Henyey and J. L. Greenstein. Diffuse reflection in the galaxy. *Astrophys. J.*, 93:70–, 1941.

[HK93] P. Hanrahan and W. Krueger. Reflection from layered surfaces due to subsurface scattering. In J. T. Kajiya, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'93 Proceedings)*, volume 27, pages 165–174, August 1993.

[HS90] S. Haas and G. Sakas. Methods for efficient sampling of arbitrary distributed volume densities. In *Photorealism in Computer Graphics (Proceedings Eurographics Workshop on Photosimulation, Realism and Physics in Computer Graphics, 1990)*, pages 215–27, Rennes, France, June 1990. comparison of methods of sampling atmospheric effects along a ray.

[HTSG91] X. D. He, K. E. Torrance, F. X. Sillion, and D. P. Greenberg. A comprehensive physical model for light reflection. In T. W. Sederberg, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'91 Proceedings)*, volume 25, pages 175–186, July 1991.

[ICG86] D. S. Immel, M. F. Cohen, and D. P. Greenburg. A radiosity method for non-diffuse environments. In *Proceedings of SIGGRAPH'86*, volume 20, pages 133–142, Ithaca, New York, 1986. Cornell University.

[Ina91] M. Inakage. Volume tracing of atmospheric environments. *The Visual Computer*, 7(2/3):104–113, May 1991.

[JW89] D. Jevans and B. Wyvill. Adaptive voxel subdivision for ray tracing. In *Proceedings of Graphics Interface'89*, pages 164–172, June 1989.

[Kaj85] J. T. Kajiya. Anisotropic reflection models. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'85 Proceedings)*, pages 15–21, July 1985. Published as Computer Graphics (SIGGRAPH'85 Proceedings), volume 19, number 3.

[Kaj86] J. T. Kajiya. The rendering equation. In D. C. Evans and R. J. Athay, editors, *Computer Graphics (SIGGRAPH'86 Proceedings)*, volume 20, pages 143–150, August 1986.

[Kla87] R. V. Klassen. Modeling the effect of the atmosphere on light. *ACM Transactions on Graphics*, 6(3):215–237, July 1987.

[KV84] J. T. Kajiya and B. P. Von Herzen. Ray tracing volume densities. In H. Christiansen, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'84 Proceedings)*, volume 18, pages 165–174, July 1984.

[Laf96] E. Lafortune. *Mathematical Models and Monte Carlo Algorithms for Physically Based Rendering*. Ph.D. thesis, Dept. of Computer Science, Faculty of Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, February 1996.

[Lan94] E. Languénou. *Radiosité hiérarchique et transfert radiatif dans les milieux semi-transparents*. Ph.D. thesis, University Rennes I, France, October 1994.

[Las92] M. J. Laszlo. Fast generation and display of iso-surface wireframes. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Graphical Models and Image Processing*, 54(6):473–483, November 1992.

[LC87] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. *ACM Computer Graphics SIGGRAPH'87*, 21(4):163–168, July 1987.

[Lep78] G. Lepage. A new algorithm for adaptative multidimentional integration. In *Journal of Computational Physics*, volume 27, pages 192–203, 1978.

[LJ84] E. E. Lewis and W. F. Miller Jr. *Computational Methods of Neutron Transport*. Wiley, 1984.

[LRU85] M. E. Lee, R. A. Redner, and S. P. Uselton. Statistically optimized sampling for distributed ray tracing. In B. A. Barsky, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'85 Proceedings)*, volume 19, pages 61–67, July 1985.

[LS92] B. Le Saëc and C. Schlick. A progressive ray-tracing-based radiosity with general reflectance functions. In K. Bouatouch and C. Bouville, editors, *Photorealism in Computer Graphics (Proceedings Eurographics Workshop on Photosimulation, Realism and Physics in Computer Graphics, 1990)*, pages 103–116, 1992.

[LW94] E. P. Lafortune and Y. D. Willems. The ambient term as a variance reducing technique for monte carlo ray tracing. In *Fifth Eurographics Workshop on Rendering*, pages 163–171, Darmstadt, Germany, June 1994.

[LW96] E. P. Lafortune and Y. D. Willems. Rendering participating media with bidirectionnal path tracing. In X. Pueyo and P. Schröder, editors, *Rendering Techniques'96 (Proceedings of the Eurographics Workshop in Porto, Portugal, June 17-19, 1996)*, pages 91–100, New York, 1996. Springer-Verlag.

[Max94] N. L. Max. Efficient light propagation for multiple anisotropic volume scattering. In *Fifth Eurographics Workshop on Rendering*, pages 87–104, Darmstadt, Germany, June 1994. also available in "Photorealistic Rendering Techniques" (eds. G. Sakas, P. Shirley, and S. Muller).

[Mea82] D. Meagher. Geometric modeling using octree encoding. *Computer Graphics and Image Processing*, 19:129–147, June 1982.

[Mey88] G. W. Meyer. Wavelength selection for synthetic image generation. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 41:57–79, 1988.

[MJ92] R. R. Melkote and K. F. Jensen. Computation of transition amd molecular diffusities in fibrous media. *Aiche Journal*, 38(1):56–66, 1992.

[Mor95] P. Moreau. *Modélisation et génération de dégradés dans le plan discret*. Ph.D. thesis, University Bordeaux I, France, December 1995.

[MP93] S. P. Mudur and S. N. Pattanaik. Monte carlo methods for computer graphics. In *State of the Art Reports EG93*, pages 3.1–3.24. Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, 1993.

[MS93] H. Muller and M. Stark. Adaptive generation of surfaces in volume data. *The Visual Computer*, 9(4):182–199, January 1993.

[NMN87] T. Nishita, Y. Miyawaki, and E. Nakamae. A shading model for atmospheric scattering considering luminous intensity distribution of light sources. In M. C. Stone, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'87 Proceedings)*, volume 21, pages 303–310, July 1987.

[NON85] Tomoyuki Nishita, Isao Okamura, and Eihachiro Nakamae. Shading models for point and linear light sources. *ACM Transactions on Graphics*, 4(2):124–146, April 1985.

[NSTN93] T. Nishita, T. Sirai, K. Tadamura, and E. Nakamae. Display of the earth taking into account atmospheric scattering. In J. T. Kajiya, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'93 Proceedings)*, volume 27, pages 175–182, August 1993.

[Pat90] S. N. Pattanaik. *Computational Methods for Global Illumination and Visualisation of Complex 3D Environments*. PhD thesis, Birla Institute of Technology & Science, Computer Science Department, Pilani, India, November 1990.

[Pat93] S. Pattanaik. The mathematical framework of adjoint equations for illumination computations. In *Proceedings of ICCG*, pages 265–288, Bombay, India, February 1993.

[Pea85] D. R. Peachey. Solid texturing of complex surfaces. In B. A. Barsky, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'85 Proceedings)*, volume 19, pages 279–286, July 1985.

[Per85] K. Perlin. An image synthesizer. In B. A. Barsky, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'85 Proceedings)*, volume 19, pages 287–296, July 1985.

[PF90] P. Poulin and A. Fournier. A model for anisotropic reflection. In F. Baskett, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'90 Proceedings)*, volume 24, pages 273–282, August 1990.

[PH89] K. Perlin and E. M. Hoffert. Hypertexture. In J. Lane, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'89 Proceedings)*, volume 23, pages 253–262, July 1989.

[PM92] S. N. Pattanaik and S. P. Mudur. Computation of global illumination by monte carlo simulation of the particle model of light. *Third Eurographics Workshop on Rendering*, pages 71–83, May 1992.

[PM93a] S. N. Pattanaik and S. P. Mudur. Computation of global illumination in a participating medium by monte carlo simulation. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 4(3):133–152, July - Spetember 1993.

[PM93b] S. N. Pattanaik and S. P. Mudur. The potential equation and importance in illumination computations. *Computer Graphics Forum*, 12(2):131–136, 1993.

[RE91] D. F. Rogers and R. A. Earnshaw. *State of the Art in Computer Graphics*. Springer-Verlag, 1991.

[Ree83] W. T. Reeves. Particle systems – A technique for modeling a class of fuzzy objects. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'83 Proceedings)*, volume 17, pages 359–376, July 1983.

[Ren84] R. J. Renka. Interpolation of data on the surface of a sphere. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 10(4):417–436, 1984.

[RP66] Azriel Rosenfeld and John L. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *Journal of the ACM*, 13(4):471–494, 1966.

[RT87] H. E. Rushmeier and K. E. Torrance. The zonal method for calculating light intensities in the presence of a participating medium. In M. C. Stone, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'87 Proceedings)*, volume 21, pages 293–302, July 1987.

[RY89] R. R. Rogers and M. K. Yau. *A Short Course in CLOUD PHYSICS*. Pergamon, 1989.

[Sab88] P. Sabella. A rendering algorithm for visualizing 3D scalar fields. In J. Dill, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'88 Proceedings)*, volume 22, pages 51–58, August 1988.

[Sak93] G. Sakas. Modeling and animating turbulent gaseous phenomena using spectral synthesis. *The Visual Computer*, 9(4):200–212, January 1993.

[SAWG91] F. X. Sillion, J. R. Arvo, S. H. Westin, and D. P. Greenberg. A global illumination solution for general reflectance distributions. In T. W. Sederberg, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'91 Proceedings)*, volume 25, pages 187–196, July 1991.

[Sch92] C. Schlick. *Divers éléments pour une synthèse d'images réalistes*. Ph.D. thesis, University Bordeaux I, France, November 1992.

[Sch94] C. Schlick. An inexpensive BRDF model for physically-based rendering. In *Computer Graphics Forum*, volume 13, pages 233–246. Eurographics, Basil Blawell Ltd, 1994. EUROGRAPHICS'94 Conference issue.

[SF93] J. Stam and E. Fiume. Turbulent wind fields for gaseous phenomena. In J. T. Kajiya, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'93 Proceedings)*, volume 27, pages 369–376, August 1993.

[SF95] J. Stam and E. Fiume. Depicting fire and other gaseous phenomena using diffusion processes. In *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, 1995 (ACM SIGGRAPH'95 Proceedings)*, pages 129–136, 1995.

[SG69] J. Spanier and E. M. Gelbard. *Monte Carlo Principles and Neutron Transport Problem.* Addison-Wesley, 1969.

[SG91] G. Sakas and M. Gerth. Sampling and anti-aliasing of discrete 3D volume density textures. In Werner Purgathofer, editor, *EUROGRAPHICS'91*, pages 87–102. North-Holland, September 1991.

[SH81] R. Siegel and J. R. Howell. *Thermal Radiation Heat Transfert.* Hemisphere Publishing Corporation, 1981.

[Shi90] P. S. Shirley. *Physically Based Lighting Calculations for Computer Graphics.* Ph.D. thesis, Computer Science Department, University of Illinois at Urbana-Champaign, November 1990.

[SK91] G. Sakas and B. Kernke. Texture shaping: a method for modelling arbitrarily-shaped volume objects in texture space. In *Eurographics Workshop on Rendering*, 1991.

[SL86] R. A. Siegel and R. Langer. A new monte-carlo approach to diffusion in constricted porous geometries. *J. Colloid Interface Sci.*, 109(1):426–440, 1986.

[SP94] F. X. Sillion and C. Puech. *Radiosity and Global Illumination.* Morgan Kaufmann, San Francisco, California, 1994.

[Spe92] L. R. Speer. A new subdivision method for high-speed, memory efficient ray shooting. *Third Eurographics Workshop on Rendering*, pages 45–60, May 1992.

[STA93] J. Salles, J.-F. Thovert, and P.-M. Adler. Deposition in porous media and clogging. *Chem. Eng. Sci.*, 48(1):2839–2858, 1993.

[Sub95] G. Subrenat. *Parallélisation de méthodes de radiosité.* Ph.D. thesis, University Bordeaux I, France, December 1995.

[SW91] P. Shirley and C. Wang. Direct lighting calculation by monte carlo integration. In *Eurographics Workshop on Rendering*, 1991.

[SW92a] G. Sakas and R. Westermann. A functional approach to the visual simulation of gaseous turbulence. In A. Kilgour and L. Kjelldahl, editors, *Computer Graphics Forum (EUROGRAPHICS'92 Proceedings)*, volume 11, pages 107–117, September 1992.

[SW92b] P. Shirley and C. Wang. Distribution ray tracing: Theory and practice. *Third Eurographics Workshop on Rendering*, pages 33–43, May 1992.

[SWH+95] P. Shirley, B. Wade, P. M. Hubbard, D. Zareski, B. Walter, and D. P. Greenberg. Global illumination via density estimation. In P. M. Hanrahan and W. Purgathofer, editors, *Rendering Techniques'95 (Proceedings of the Eurographics Workshop in Dublin, Ireland, June 12-14, 1995)*, pages 219–230, New York, 1995. Springer-Verlag.

[TS66] K. E. Torrance and E. M. Sparrow. Polarization, directional distribution, and off-specular peak phenomena in light reflected from roughened surfaces. *Journal of Optical Society of America*, 56(7), 1966.

[TS67] K. E. Torrance and E. M. Sparrow. Theory for off-specular reflection from roughened surfaces. *Journal of Optical Society of America*, 57(9), 1967.

[TS93] M. M. Tomadakis and S. V. Sotirchos. Ordinary and transition regime diffusion in random fiber structures. *Aiche Journal*, 39(3):397–412, 1993.

[VG84] C. P. Verbeck and D. P. Greenberg. A comprehensive light-source description for computer graphics. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(7):66–75, July 1984.

[VG94] E. Veach and L. Guibas. Bidirectional estimators for light transport. In *Fifth Eurographics Workshop on Rendering*, pages 147–162, Darmstadt, Germany, June 1994.

[Vig95] G. L. Vignoles. Modeling binary, knudsen and transition regime diffusion inside complex porous media. *Journal de Physique IV*, 65(1):159–166, June 1995.

[Vos85] R. Voss. Random fractal forgeries. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'85 Conference Tutorial Notes)*, 1985.

[Wal91] A. Wallin. Constructing isosurfaces from CT data. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(6):28–33, November 1991.

[War83] D. R. Warn. Lighting controls for synthetic images. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'83 Proceedings)*, volume 17, pages 13–21, July 1983.

[War92] G. J. Ward. Measuring and modeling anisotropic reflection. In E. E. Catmull, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'92 Proceedings)*, volume 26, pages 265–272, July 1992.

[WAT92] S. H. Westin, J. R. Arvo, and K. E. Torrance. Predicting reflectance functions from complex surfaces. In E. E. Catmull, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH'92 Proceedings)*, volume 26, pages 255–264, July 1992.

[Whi80] T. Whitted. An improved illumination model for shaded display. *Communications of the ACM*, 23(6):343–349, 1980.

[ZC89] L. H. Zheng and Y. C. Chiew. Computer simulation of diffusion-controled reactions in dispersions of spherical sinks. *J. Chem. Phys*, 90(1):322–327, 1989.

[ZWHS95] David Zareski, Bretton Wade, Philip Hubbard, and Peter Shirley. Efficient parallel global illumination using density estimation. In *IEEE/ACM 1995 Parallel Rendering Symposium (PRS'95)*, Atlanta, Georgia, October 1995.