Université BORDEAUX I le 2 février 1998

Maîtrise d'Informatique
Certificat de Calculabilité et Complexité

Durée 2h
Tous documents autorisés
Barème : 4 + 4 + 3.5 + 3.5 + 5
(La clarté de la présentation sera prise en compte dans la notation.)

Exercice 1 Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. *Les explications ne sont pas exigées.*

1. La fonction $f(x, y) = (x + y)^3$ est primitive récursive.
2. Tout ensemble décidable est domaine de définition d'une fonction récursive totale.
3. Le problème de GRAPHE D'INTERSECTION (voir l'exercice 5) est décidable.
4. Le problème de 3-COLORATION DES GRAPHES est NP-complet.
5. L'intersection d'un ensemble énumérable et d'un ensemble fini est toujours décidable.
6. La complexité de Kolmogorov $K(x)$ est calculable.
7. Il existe un x tel que la fonction universelle $U(x; m)$ n'est pas définie quelque soit la valeur de m.
8. Il existe un ensemble décidable d'entiers dont tous les éléments sont impairs.

Exercice 2 Ecrire un schéma de récursion pour la fonction f qui à tout entier naturel n associe la somme des chiffres de la représentation décimale de n. Exemple : $n = 125 \Longrightarrow f(n) = 8$. (L'utilisation des fonctions déjà définies comme récursives en TD est autorisée.)

Exercice 3 Construire une Machine de Turing qui, pour un entier naturel n représenté en système ternaire, calcule la somme de ses chiffres (la somme doit elle aussi représentée en système ternaire). Exemple : pour $n = 125$ sa représentation ternaire est 11122; la somme des chiffres est donc égale à 7, soit 21 en ternaire.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4 Soient A et B deux ensembles récursivement énumérables. Montrer qu'il existe deux ensembles récursivement énumérables et *disjoints* A_1 et B_1 tels que $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ et $A_1 \bigcup B_1 = A \bigcup B$. (Une description informelle des algorithmes est suffisante.)

Exercice 5 Le problème de GRAPHE D'INTERSECTION se décrit comme suit :

> Instance : Un graphe G et un entier N.
>
> On cherche : Un ensemble X, $|X| = N$, et pour tout sommet i du graphe G, un sous-ensemble $X_i \subset X$, tels que X_i et X_j soient disjoints si et seulement si (i, j) est une arête du graphe.

Montrer *directement* (c'est-à-dire, sans s'appuyer sur le théorème de Cook), que le problème de GRAPHE D'INTERSECTION est polynomialement réductible au SAT. (On *ne demande pas* de prouver que le problème SAT est polynomialement réductible au GRAPHE D'INTERSECTION.)