Université BORDEAUX I le 30 janvier 1996

Maîtrise d'Informatique
Certificat de Calculabilité et Complexité

Durée 2h
Tous documents autorisés
Barème : 3+3+3+3+3+5
(La clarté de la présentation sera prise en compte dans la notation.)

Exercice 1. Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. Les explications ne sont pas exigées.

a) La fonction universelle $U(m;x)$ est primitive récursive.

b) La fonction $f(n)$ qui associe à tout $n \in \mathbf{N}$ le n-ième chiffre après la virgule du nombre π ($f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, etc.) est récursive totale.

c) Le problème CIRCUIT HAMILTONIEN est NP-complet.

d) Le problème 3-COLORATION DES GRAPHES est décidable.

e) Toute fonction dont le domaine de définition est fini est récursive partielle.

g) Le complément d'un ensemble fini est récursivement énumérable.

Exercice 2. Construire une Machine de Turing à deux bandes qui lit un nombre unaire x sur la première bande, et qui le transforme en binaire sur la deuxième bande.

Exemple. Le nombre d'entrée est $x = 1111111111111$ (13 chiffres 1); le résultat sur la deuxième bande est 1101 (c'est-à-dire, le nombre 13 écrit en binaire) .

Exercice 3. Ecrire un schéma de récursion pour la fonction suivante:

$$f(x,n) = [x^{1/n}],$$

où les crochets signifient la partie entière. (L'utilisation de fonctions déjà définies comme récursives en TD est autorisée.)

Exercice 4. Soit $A \subset \mathbf{N}^2$ un ensemble décidable tel que $\forall (x,y) \in A$ on a $\log x \leq y \leq 2^x$. Montrer que la projection de A sur l'axe Ox est décidable. (Une description informelle d'algorithme est suffisante.)

Tournez la page S.V.P.

Exercice 5. Soit $P \in \mathcal{P}$ un programme pour la Machine à Registres. On suppose que tous les registres de données sont initialisés à zéro. Soit

$$\text{change}_1(P)$$

le prédicat vrai si le contenu du registre X_1 change au moins une fois pendant le travail de la machine, et faux sinon. Montrer que ce prédicat est indécidable.

Exercice 6. Montrer *directement* (c'est-à-dire, sans s'appuyer sur le théorème de Cook), que le problème de CIRCUIT HAMILTONIEN est polynomialement réductible au problème SAT. (On *ne demande pas* de prouver que le problème SAT est polynomialement réductible au CIRCUIT HAMILTONIEN.)