Université BORDEAUX I le 31 janvier 1997

Maîtrise d'Informatique
Certificat de Calculabilité et Complexité

Durée 2h
Tous documents autorisés
Barème : 4+4+3+4+5
(La clarté de la présentation sera prise en compte dans la notation.)

Exercice 1 Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. *Les explications ne sont pas exigées.*

a) La fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est primitive récursive.

b) La fonction $f(n)$ qui associe à tout $n \in \mathbf{N}$ le n-ième chiffre après la virgule du nombre $e = 2,71828\ldots$ ($f(0) = 2$, $f(1) = 7$, $f(2) = 1$, $f(3) = 8$, etc.) est récursive totale.

c) Le problème CIRCUIT HAMILTONIEN est décidable.

d) Le problème 2-COLORATION DES GRAPHES est NP-complet.

e) L'union d'un ensemble énumérable et d'un ensemble fini est toujours énumérable.

f) La projection d'un ensemble décidable est toujours décidable.

g) Il existe un m tel que la fonction universelle $U(m; x)$ est définie pour tout x premier et n'est pas définie pour tout x non premier.

h) Quel que soit un ensemble récursivement énumérable A, l'ensemble $B = \{x \bmod 13 \mid x \in A\}$ est toujours décidable.

Exercice 2 Construire une Machine de Turing à une bande qui, pour une configuration initiale $\#x\#$ (où x est un mot binaire) donne comme résultat la configuration suivante: $\#x\#x\#$.

Exercice 3 Ecrire un schéma de récursion pour la fonction suivante:

$$f(0) = 0, \qquad f(n) = [\log_7 n] \quad \text{pour} \quad n \geq 1,$$

où les crochets signifient la partie entière. (L'utilisation des fonctions déjà définies comme récursives en TD est autorisée.)

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4 Soit $C \subset \mathbf{N}^2$ un ensemble décidable tel que pour tout couple $(x, y) \in C$ la condition $y \geq x^3$ soit satisfaite. Soit A la projection de C sur l'axe Ox, et B la projection de C sur l'axe Oy. Laquelle des deux projections est nécessairement décidable? Laquelle peut ne pas être décidable? Justifier vos réponses.

Exercice 5 Le problème de MARIAGE PARFAIT se décrit comme suit:

> Instance: Un tableau carré de taille $n \times n$, dans certaines cases duquel se trouvent des symboles $*$ ("étoiles").
>
> Question: Est-il possible de supprimer un certain nombre d'étoiles, de telle manière qu'il reste une et une seule étoile dans chaque ligne et dans chaque colonne du tableau.

Montrer *directement* (c'est-à-dire, sans s'appuyer sur le théorème de Cook), que le problème de MARIAGE PARFAIT est polynomialement réductible au SAT. (On *ne demande pas* de prouver que le problème SAT est polynomialement réductible au MARIAGE PARFAIT.)