Université BORDEAUX I le 15 septembre 1997

Maîtrise d'Informatique
Calculabilité et Complexité - Session de septembre

Durée 2 heures
Tous documents autorisés
Barème : 4+4+3+4+5
(La clarté de la présentation sera prise en compte dans la notation.)

Exercice 1 Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. *Les explications ne sont pas exigées.*

(a) Le problème SAT est décidable.

(b) Le problème VOYAGEUR DE COMMERCE est NP-complet.

(c) Tout ensemble récursivement énumérable est décidable.

(d) La fonction universelle $U(m;x)$ est totale.

(e) Le complément d'un ensemble fini est décidable.

(f) Tout problème de la classe NP est NP-complet.

(g) Toute fonction récursive totale peut être définie sans jamais utiliser la minimalisation.

(h) Toute fonction dont le domaine des valeurs est fini, est algorithmiquement calculable.

Exercice 2 Construire une machine de Turing à deux bandes qui lit un mot d'entrée $w \in \{a,b\}^*$ sur la première bande, calcule le nombre des facteurs ab dans ce mot, et écrit la réponse en binaire sur la deuxième bande.

Exercice 3 Ecrire un schéma de récursion pour la fonction suivante:

$$n \mapsto n\text{-ème chiffre après la virgule de } \sqrt[3]{5}$$

(le "0-ème chiffre après la virgule" est le chiffre juste avant la virgule). L'utilisation des fonctions déjà définies comme récursives en TD est autorisée.

Exercice 4 Soit A un sous-ensemble décidable de $\mathbf{N}$. Pour tout $x \in A$ on met dans B tous les multiples de x, c'est-à-dire, les nombres $0, x, 2x, 3x, \ldots$. Montrer que l'ensemble B est décidable. (Une description informelle d'un algorithme est suffisante.)

Exercice 5 Montrer *directement* (c'est-à-dire, sans s'appuyer sur le théorème de Cook), que le problème de CIRCUIT HAMILTONIEN est polynomialement réductible au SAT. (On *ne demande pas* de prouver que le problème SAT est polynomialement réductible au CIRCUIT HAMILTONIEN.)