Université BORDEAUX I Le 5 décembre 1996

Maîtrise d'Informatique
Calculabilité et Complexité – Devoir à la maison

Vous pouvez travailler par équipes, mais chacun(e) doit rédiger sa copie personnellement. Les copies doivent être rendues à l'enseignant de votre groupe de TD au plus tard le 21 décembre (avant les vacances de Noël).

La clarté de la présentation sera prise en compte dans la notation.

Barème : 3+3+3+4+3+4

Exercice 1. Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. Expliquer vos réponses.

a) La fonction universelle $U(x;m)$ est primitive récursive.

b) Pour deux ensembles récursivement énumérables A et B, la différence $A - B$ est toujours récursivement énumérable.

c) Il existe une machine de Turing qui calcule la fonction universelle.

d) L'ensemble des nombres entiers non premiers est décidable.

e) Toute fonction dont le domaine de définition est fini, est algorithmiquement calculable.

f) Tout ensemble décidable est fini.

Exercice 2. Donner une méthode de numérotage de l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$ qui vérifient la condition $x \leq y \leq z$. Donner une formule explicite pour ce numérotage.

Exercice 3. L'équation $x^7 + x^5 + x^3 + x - 17 = 0$ possède une unique racine réelle $x_0 = 1,358028428...$. Écrire un schéma de récursion pour la fonction

$$f(n) = n\text{-ème chiffre de } x_0 \text{ après la virgule}$$

(le "0-ème chiffre après la virgule" est le chiffre 1 avant la virgule).

L'utilisation de fonctions déjà définies comme récursives en TD est autorisée.

Exercice 4. Soit $A \subseteq \mathsf{N}$ un ensemble décidable. Pour tout $x \in A$ on met dans B le nombre $x - (t^3 + t)$ où t est le plus grand entier tel que $t^3 + t \leq x$. L'ensemble B peut-il ne pas être décidable? Justifier votre réponse.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 5. Construire une machine de Turing avec une bande infinie dans les deux sens, qui change le contenu de *chaque* case une infinité de fois.

Exercice 6. Soit $P(x)$ un prédicat calculable et total, et $f(x)$ une fonction calculable et totale. On considère le programme suivant:

$Y := 0$
$Z := X$
while $P(Z)$ **do**
  $Z := Z + 1$
  $Y := f(Y)$
end

Soit $F : x \mapsto y$ définie par ce programme.

a) F est-elle récursive totale? récursive partielle?

b) Soit $H(x)$ une fonction définie comme suit:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } F(x) \text{ est définie,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Est-elle une fonction calculable? Justifier vos réponses.