Université BORDEAUX I le 11 décembre 1997

Maîtrise d'Informatique
Calculabilité et Complexité – Devoir à la maison

Vous pouvez travailler par équipes, mais chacun(e) doit rédiger sa copie personnellement. Les copies doivent être rendues à l'enseignant de votre groupe de TD avant les vacances de Noël. La clarté de la présentation sera prise en compte dans la notation.

Barème : 3+3+3+4+3+4

**Exercice 1** Répondre par "oui" ou par "non" aux questions suivantes. Justifier vos réponses (mais brièvement !).

a) La fonction universelle $U(x;m)$ est primitive récursive.

b) Le complément d'un ensemble fini est toujours décidable.

c) Il existe une machine de Turing qui calcule le $n$-ième nombre premier (en fonction de $n$).

d) Le domaine des valeurs de la fonction universelle $U(x;m)$ est décidable.

e) Toute fonction dont le domaine de définition est fini, est algorithmiquement calculable.

f) Tout ce qu'on peut programmer en C, on peut aussi programmer en machine à registres.

**Exercice 2** Donner une méthode de numérotation des listes $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $n \geq 0$, $a_i \in \mathsf{N}$ qui vérifient les conditions suivantes:

a) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$;

b) il est interdit d'avoir plusieurs entiers naturels égaux à la fin de la liste (c'est-à-dire, si $n \geq 2$, alors $a_{n-1} < a_n$).

Donner la formule explicite correspondante.

**Exercice 3** Ecrire un schéma de récursion pour la fonction

$f(n) = n$-ième chiffre après la virgule du nombre $\log_7 17 = 1.4559836410\ldots$

(ici le "0-ième chiffre après la virgule" est le chiffre 1 avant la virgule). L'utilisation des fonctions déjà définies comme récursives en TD est autorisée.

**Exercice 4** Soit $A \subseteq \mathsf{N}$ un ensemble décidable. Pour tout $x \in A$ on met dans $B$ le nombre $x - (t^2 + 2t + 3)$ où $t$ est le plus grand entier tel que $t^2 + 2t + 3 \leq x$. L'ensemble $B$ peut-il ne pas être décidable? Justifier votre réponse.

**Tournez la page S.V.P.**

**Exercice 5** Construire une machine de Turing à une bande qui, pour un entier $x \in \mathbf{N}$ représenté en système *ternaire* (c'est-à-dire, sur la base 3), calcule $2x$.

**Exercice 6** Montrer qu'il existe une fonction *non calculable* $f(n)$ telle que pour tout $m \geq 1$ la fonction

$$f_m(n) = f(n) \bmod m$$

soit calculable et totale.