Université Bordeaux I
Maîtrise d'Informatique 1997/1998

Calculabilité et complexité : feuille 1

Exercice 1.1

Tout nombre réel peut s'écrire , de façon unique, $n + 0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$ où $n \in \mathbb{Z}$ et où chaque a_k est un chiffre de 0 à 9, la suite des a_k comprenant une infinité de chiffres distincts de 9. Utiliser cette représentation des réels pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.2

Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.3

Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.4

Définir une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$; une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$ (pour chacune, expliciter les formules de la fonction et de sa réciproque).

Exercice 1.5

Montrer que N^3 est dénombrable, et plus généralement que, pour tout entier $k > 0$, N^k est dénombrable.

Exercice 1.6

A étant un alphabet fini, proposer une méthode de numérotage de A^*.

Exercice 1.7

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des listes finies d'entiers naturels (y compris la liste vide) qui, sauf la liste (0), ne comportent pas de zéro en fin de liste. Montrer que la fonction de Gödel

$$\begin{aligned} () &\longrightarrow 0 \\ (0) &\longrightarrow 1 \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) &\longrightarrow 2^{a_1} 3^{a_2} \ldots p_n^{a_n} \quad (p_n : \textit{le n-ième nombre premier}) \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathcal{L}$ sur N; proposer une méthode de numérotage de l'ensemble de toutes les listes finies d'entiers naturels.