Université Bordeaux I
Maîtrise d'Informatique 1997/1998

Calculabilité et complexité : feuille 2

Exercice 2.1

Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il est ou non dénombrable (justifier la réponse):

- *l'ensemble des nombres rationnels*
- *l'ensemble des parties finies de* $\mathbb{N}$
- *l'ensemble des automates déterministes sur* $\{a, b\}^*$
- *l'ensemble des langages rationnels sur un alphabet fini.*

Exercice 2.2

Montrer qu'il n'existe pas de fonction calculable et totale f *telle que* $f(x) = \mathcal{U}(x, x) + 17$ *chaque fois que* $\mathcal{U}(x, x)$ *est définie (au cas où* $\mathcal{U}(x, x)$ *n'est pas définie,* $f(x)$ *peut prendre n'importe quelle valeur).*

Exercice 2.3

Soit f *la fonction de deux variables définie par*

$$f(m, x) = \begin{cases} m^2 + x^2 \text{ si } \mathcal{U}(m, x) \text{ est définie} \\ \text{non définie sinon} \end{cases}$$

f *peut-elle être prolongée en une fonction calculable totale ?*

Exercice 2.4

Toute fonction partiellement calculable se trouve dans l'une (au moins) des lignes du tableau de valeurs de la fonction universelle. La même propriété est-elle vraie pour les colonnes ?

Exercice 2.5

La machine à registres comporte des registres de données `X1`, `X2`, `X3`..., *un* registre de résultat `Y`, *et des* registres de travail `Z1`, `Z2`, `Z3`...

Les instructions de base sont l'incrémentation `V` $\longleftarrow$ `V` $+1$, *la décrémentation* `V` $\longleftarrow$ `V` $\dot{-}$ 1, *le branchement* `IF V` $\neq 0$ `GOTO e`, *et l'instruction nulle* `V` $\longleftarrow$`V`.

Programmer sur la machine à registres

1. *le* `GOTO` *inconditionnel*
2. *le* `STOP`
3. *l'affectation* `V := 0`
4. *l'affectation* `V1 := V2`