UNIVERSITÉ BORDEAUX I — ANNÉE 1996-1997

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES ET ET D'INFORMATIQUE — NOVEMBRE 1996

MAITRISE INFORMATIQUE — THÉORIE DES LANGAGES

AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ — CORRIGÉ

– I –

1. Il est clair que si $u \xrightarrow{S} v$ alors v est plus grand que u (lexicographiquement). Par conséquent, il ne peut y avoir de chaine infine puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de mot d'une même longueur.

   Pour S', le même argument peut être appliqué en remarquant que si $u \xrightarrow{S'} v$ alors soit v est plus grand que u (lexicographiquement), soit $|v| < |u|$. Par conséquent, il ne peut y avoir de chaine infine puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de mot de longueur bornée.

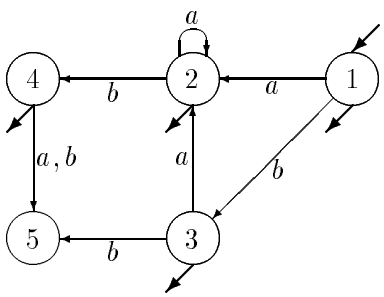
2. On étudie la confluence des systèmes en examinant les paires critiques (facteurs chevauchants). La seule paire critique apparait ici pour la réécriture du mot $ababa$. Dans S, on peut d'une part obtenir le mot $babba$, d'autre part le mot $abbab$ qui sont tous deux irréductibles. Par conséquent, S n'est pas confluent.

   Pour S', le mot $ababa$ est aussi le seul cas à étudier. Dans ce cas, on calcule $abbab \xrightarrow{S'} abab \xrightarrow{S'} babb \xrightarrow{S'} bab$ et $babba \xrightarrow{S'} baba \xrightarrow{S'} bbab \xrightarrow{S'} bab$. Ce qui montre que S' est localement confluent. Or, il est noethérien, donc confluent.

3. (a) On procède par induction. Les cas $n = 0, 1$ sont évidents. L'étape d'induction repose sur le calcul $b^{n+1}ab \xleftarrow{S} b(aba^n) \xleftarrow{S} (aba)a^n$.

   (b) On calcule $abbbab \xleftarrow{S} abbaba \xleftarrow{S} ababaa \xrightarrow{S} babbaa$.

4. Les mots irréductibles de S' sont les mots ne contenant aucun facteur pouvant être réécrit, c'est-à-dire les mots ne contenant aucun facteur aba ou bb. Ce langage est reconnu par l'automate:



et est décrit par l'expression rationelle $(\epsilon + b)a^*(\epsilon + ab)$.

– II –

1. On a

$$(Df)a \to ((\lambda z.\lambda x.(zx)x)f)a$$
$$\to \quad (\lambda x.(fx)x)a \to (fa)a$$

2. $E : (\lambda z.\lambda xy.(zy)x)$

3. On a (cf plus haut) $Df = \lambda x.(fx)x$. On a:

$$\begin{aligned} Ef &= (\lambda z.\lambda xy.(zy)x)f \\ &\to \lambda xy.(fy)x) \end{aligned}$$

puis:

$$\begin{aligned} D(Ef) &= (\lambda z.\lambda x.(zx)x)(\lambda xy.(fy)x) \\ &\to (\lambda z.\lambda u.(zu)u)(\lambda xy.(fy)x) \\ &\quad (\alpha - \text{conversion}) \\ &\to \lambda u.((\lambda xy.(fy)x)u)u \\ &\to \lambda u.(\lambda y.(fy)u)u \\ &\to \lambda u.(fu)u \end{aligned}$$

d'où $D(Ef) = Df$.

4. On a (cf plus haut) $Ef = \lambda xy.(fy)x)$. On calcule

$$\begin{aligned} E(Ef) &= (\lambda z.\lambda xy.(zy)x)\lambda xy.(fy)x) \\ &\to (\lambda z.\lambda xy.(zy)x)\lambda ut.(ft)u) \\ &\quad (\alpha - \text{conversion}) \\ &\to \lambda xy.((\lambda ut.(ft)u)y)x \\ &\to \lambda xy.(\lambda t.(ft)y)x) \\ &\to \lambda xy.(fx)y \equiv f \end{aligned}$$

5. L'évaluation de f en x et x n'a de sens que si les deux variables de la fonction appartiennent au même domaine. On a donc f qui est de type $\alpha \to (\alpha \to \beta)$.

   (a) Par conséquent D est de type $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$ (il transforme une fonction de deux variables en une fonction d'une seule variable).

   (b) DE ne peut être typé.

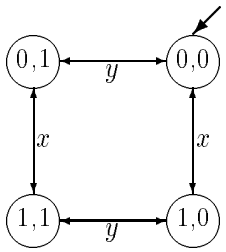
   (c) Df est du type $\alpha \to \beta$ (une fonction d'une seule variable).

   (d) Ef est de type $\alpha \to (\gamma \to \beta)$ (une fonction de deux variables).

   (e) $(Df)a$ est de type β.

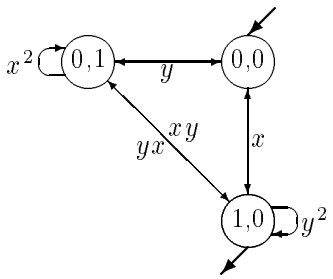
– III –

1. Soit l'automate:

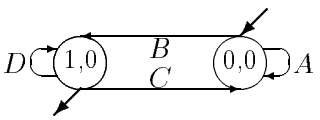


   dont l'état final est étiquetté i, j. Il reconnait $P_{i,j}$.

2. Considérons maintenant cet automate avec état final étiquetté $1, 0$. On applique Mc Naughton pour éliminer l'état étiquetté 1, 1. On obtient:



   On élimine maintenant l'état étiquetté $0, 1$. On obtient:



où: $A = y(x^2)^*y$, $B = x + y(x^2)^*xy$, $C = x + yx(x^2)^*y$ et $D = yx(x^2)^*xy + (y^2)^*$. On trouve donc $P_{1,0} = A^*B(C^*DA^*B)^*$.

3. Le système d'équations rend compte des relations de parité du mombre de x et de y dans les mots:

$$\begin{aligned} P_{0,0} &= \epsilon + xP_{1,0} + yP_{0,1} \\ P_{1,0} &= xP_{1,0} + yP_{0,1} \\ P_{0,1} &= xP_{1,1} + yP_{0,0} \\ P_{1,0} &= xP_{0,0} + yP_{1,1} \end{aligned}$$