UNIVERSITÉ BORDEAUX I — ANNÉE 1996-1997

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES ET ET D'INFORMATIQUE — NOVEMBRE 1996

MAITRISE INFORMATIQUE — THÉORIE DES LANGAGES

AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ — DUREE: 2 HEURES

– I –

Soit l'alphabet $X = \{a, b\}$ et les systèmes de réécriture suivants:

$$S = \{(aba, bab)\},\ \ S' = \{(aba, bab), (bb, b)\}.$$

On rappelle que $\overset{*}{\longleftrightarrow}$ désigne la fermeture réflexive et transitive de la relation induite $\longleftrightarrow = (\rightarrow \cup \leftarrow)$ par un système de réecriture.

1. S et S' sont-ils noethériens?
2. S et S' sont-ils confluents?
3. Montrer pour le système S que pour tout $n \geq 1$:
   (a) $b^n ab \overset{*}{\longleftrightarrow} aba^n$
   (b) $abbbab \overset{*}{\longleftrightarrow} babbaa$
4. Quel est le langage rationnel des mots irréductibles de S'.

– II –

On rappelle que toute fonction binaire (à deux variables) $f : A \times B \rightarrow C$ est considérée comme une fonction unaire (à une variable) $f : A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

1. Considérez le λ-terme D suivant: $\lambda z.\lambda x.(zx)x$. Réduisez autant que possible, par β-réductions, le λ-terme $(Df)a$.
2. Construire un λ-terme E qui correspond à l'opérateur qui à toute fonction binaire f associe la fonction binaire g telle que $g(x, y) = f(y, x)$.

3. Vérifier au moyen de β-réductions que pour toute fonction f on a: $D(E(f)) = D(f)$.

4. Vérifier au moyen de β-réductions que pour toute fonction binaire f on a: $f = E(Ef)$, en utilisant le fait que f a toujours la meme valeur que $\lambda x.\lambda y.(fx)y$.

5. Précisez les types, de la manière la plus générale possible, des termes D, DE, Df, Ef et $(Df)a$.

– III –

Soit $X = \{x, y\}$ et $i, j \in \{0, 1\}$ supposés fixés. On définit le langage $P_{i,j}$ en posant:

$$P_{i,j} = \{f \in X^* : |f|_x \equiv i \bmod 2, |f|_y \equiv j \bmod 2\}.$$

1. Donnez un automate à 4 états qui reconnait $P_{i,j}$ (on précisera l'(es)état(s) final(aux) en fonction des valeurs de i et j).

2. Déduire par l'algorithme de Mc Naughton une expression rationelle pour les langages $P_{1,0}$.

3. Donnez un système de quatre équations qui lient les quatre langages $P_{i,j}$ (obtenus des quatres couples de valeurs possibles pour i et j).