Université Bordeaux I
UFR de Mathématiques et Informatique **Session de Février 1997**

Théorie des Langages

durée 2 heures; documents interdits

1 Exercice (5 points)

Soit l'alphabet $X = \{x, y\}$ et le langage $L = x^\star y$. On considère les résiduels $f^{-1}L$ pour tout mot f de $X^\star$ et l'équivalence associée θ_L définie sur $X^\star$ par,

$$f\ \theta_L\ g \ \Leftrightarrow\ f^{-1}\ L\ =\ g^{-1}\ L.$$

1. Donner pour chacune des classes d'équivalence ainsi définies
   - une expression rationnelle,
   - un représentant de longueur minimale de la classe,
   - une expression rationnelle du résiduel associé.
2. En déduire un automate déterministe complet de L.
3. Est-il minimal?

2 Problème (15 points)

Notations. On utilisera les alphabets $X = \{a, b\}$ et $Y = X \cup \{c\}$. Les langages seront désignés par les majuscules $A, B, C, \ldots$, les mots par les lettres $f, g, \ldots$ ou u, v, et $w, \ldots$

Le but du problème est d'établir que le complémentaire dans $Y^\star$ du langage

$$L \ =\ \{f\ |f = ucu,\ u\ \in X^\star\}.$$

est algébrique tandis que L ne l'est pas (résultat admis).

1ère question (3 points). On considère le langage

$$A \ =\ \{f\ |f = ucv,\ u \text{ et } v \in X^\star, |u| = |v|\}.$$

1. Donner les mots de A de longueur inférieure à 4.
2. Donner une grammaire de A et prouver sa validité.
3. Montrer à l'aide d'une intersection avec un rationnel bien choisi que A n'est pas rationnel.

2ème question (5 points). Soit B le langage

$$B \ =\ \{f\ |f = ucv,\ u \text{ et } v \in X^\star, |u| \neq |v|\}.$$

1. Donner les mots de B de longueur inférieure à 4.

2. Montrer que $B = A \cdot X^+ \cup X^+ \cdot A$.

3. En déduire une grammaire de B que l'on ne demande pas de prouver.

4. Soit $f \in B$. Montrer que f se factorise en $ucwv$ ou $uwcv$ avec $|u| = |v|$, et $w \in X^+$. En déduire une nouvelle grammaire de B .

5. Exprimer B à l'aide de substitutions que l'on déterminera.

3ème question (7 points). On considère les langages C, D, E_a, E_b et F, ainsi définis:

$$\begin{aligned}
C &= \{f \mid f = ucv,\ u \text{ et } v \in X^\star,\ |u| = |v|,\ \text{et } u \neq v\},\\
D &= \{f \mid f = ucv,\ u \text{ et } v \in X^\star,\ u \neq v\},\\
E_a &= \{f \mid f = uawcv,\ u,\ v \text{ et } w \in X^\star,\ |u| = |v|\},\\
E_b &= \{f \mid f = ubwcv,\ u,\ v \text{ et } w \in X^\star,\ |u| = |v|\},\\
F &= \{f \mid f = uawcubx \text{ ou } f = ubwcuax,\ u,\ w \text{ et } x \in X^\star\},
\end{aligned}$$

1. Donner les mots de longueur minimale de C. Quelle relation lie B , C, D ?

2. Montrer que C n'est pas algébrique (on pourra utiliser le fait que le langage $\{a^n b^m c a^{n'} b^{m+n-n'} \mid n,\ n',\ m\ \geq 0, n \neq n'\}$n'est pas algébrique).

3. Donner les mots de longueur minimale de $E_a \cdot b \cdot X^\star \cap E_b \cdot a \cdot X^\star$. Montrer que $F = E_a \cdot b \cdot X^\star \cup E_b \cdot a \cdot X^\star$

4. Montrer que $D = B \cup F$.

5. En s'inspirant de la grammaire de B établie en 2.4, construire une grammaire de E_a (resp. E_b) (on ne demande pas de la prouver).

6. En déduire une grammaire de F puis une de D (sans prouver la validité).

7. Calculer $Y^\star \setminus L$ et expliquer pourquoi ce langage est algébrique.