Exercice 1. Montrez que les langages suivants, sur l'alphabet $\{a,b\}\}$, sont algébriques:

1. $\{a^n b^p : n > p\}$
2. $\{a^n b^p : n \neq p+2\}$
3. $\{a^n b^p : n \geq 0 \text{ et } n \leq p \leq 2n\}$
4. $\{u\tilde{u} : u \in \{a,b\}^*\}$
5. $\{a^k b^{n_1} c^{n_1} b^{n_2} c^{n_2} \ldots b^{n_k} c^{n_k} : k > 0, \forall i, n_i > 0\}$

Exercice 2.

1. Soit l'alphabet $\{\lambda, (,), x, y, z\}$. Le langage des λ-expressions en les variables x, y, z est un langage algébrique.
2. Soit l'alphabet $\{a, b, c, \cup, \cdot, ^*, (,)\}$. Montrez que langage des expressions rationnelles sur l'alphabet X est un langage algébrique.

Exercice 3. Soit l'alphabet $\{x, y, z, (,), \cdot, +, -, /\}$. Nous allons considérer le langage des expressions arithmétiques complètement parenthésées (aucune règle de priorité).

1. Soit $k \geq 0$. Montrez que le langage des expressions arithmétiques de profondeur $\leq k$, noté $E_{\leq k}$, est un langage rationnel (donnez une expression rationnelle pour $E_{\leq k}$ en fonction de $E_{\leq k-1}$).
2. Montrez que le langage de toutes les expressions arithmétiques est un langage algébrique.

Exercice 4. Soit $X = \{a,b\}$ et soit $G =< X, \{S\}, P >$, où $P = \{S \rightarrow aSS+b\}$. Le langage engendré par G, noté $L(G)$, est appelé langage de Lukasiewicz.

1. Montrez que tout mot $u \in$ vérifie : (i) $|u|_b = |u|_a + 1$ et (ii) $\forall v$, facteur gauche de u, $v \neq u$, on a $|v|_a \geq |v|_b$.
2. Montrez que si $w \in X^*$ satisfait les conditions (i) et (ii), alors soit $w = b$, soit w commence par une occurrence de a et alors il existe des mots u tel que $w = auv$ et $|au|_a = |au|_b$, avec u, v qui vérifient également les conditions (i) et (ii). En déduire que $L(G) = \{u \in X^* : u$ satisfait les conditions (i) et (ii) $\}$.

Exercice 5. On considère sur l'alphabet $X = \{a,b\}$, le langage:

$$L = \{f \in X^* : |f|_a = |f|_b\}$$

et le langage de Dyck:

$$D = \{f \in X^* : |f|_a = |f|_b \text{ et } \forall g, h \in X^*, f = gh \Rightarrow |g|_a \geq |g|_b\}.$$

1. Donnez tous les mots de longueur 4 du langage L. Précisez ceux qui sont des mots de D.

Dernière mise-à-jour – 16 décembre 1996

2. On considère le mot $f = aaabbbbaba$. Est-il dans L? Montrez qu'il s'écrit de façon unique sous la forme $f = aubv$ avec $u \in D$ et $v \in L$.

3. Montrez que cette propriété est vraie pour tout $f \in aX^* \cap L$.

   En déduire par analogie (on ne demande pas la preuve) une décomposition unique pour les mots de $bX^* \cap L$ qui met en jeu un langage $\bar{D}$ (analogue à D).

4. On rappelle que la grammaire du langage de Dyck est $G_D = (X, S, P)$ où $P = \{D \to \epsilon + aDbD\}$. En déduire une grammaire de $\bar{D}$, puis de L. Démontrez que cette dernière engendre L.

5. Montrez que la grammaire pour L n'est pas ambiguë (on admettra que les grammaires pour D et $\bar{D}$ ne le sont pas).