Exercice 1. Soit X un alphabet. Un mot $w \in X^*$ est facteur gauche d'un mot $u \in X^*$ s'il existe $v \in X^*$ tel que $u = wv$. Par exemple, sur $X^* = \{a, b\}^*$ le mot aba est facteur gauche du mot $abaab$.

De manière équivalente, un mot w est facteur gauche d'un mot d'un langage L ssi $wX^* \cap L \neq \emptyset$, où wX^* désigne l'ensemble de mots $\{wu | u \in X^*\}$.

Etant donné un langage L, on désigne par $FG(L)$ l'ensemble des facteurs gauches des mots de L:

$$FG(L) = \{w \in X^* | wX^* \cap L \neq \emptyset\}.$$

Calculer $FG(L)$ pour chacun des langages suivants:

1. $\{a^n b^n : n \geq 0\}$
2. $\{a^n b^m : 0 \leq n \leq m\}$
3. $\{a^n b^m : 0 \leq m \leq n\}$
4. $\{u \in X^* : |u|_a = |u|_b\}$

Rappels. Soit X, Y des alphabets. On rappelle qu'une application $h : X^* \to Y^*$ est un homomorphisme de monoïdes si on a $h(uv) = h(u)h(v)$ pour tout $u, v \in X^*$. On dit qu'un langage $M \subset Y^*$ est une *image par l'homomorphisme* h d'un langage $L \subset X^*$ si $h(L) = M$.

Exercice 2. Les langages suivants sont-ils des images par homomorphismes du langage $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$? Démontrez vos affirmations.

1. $\{(ab)^n (cd)^n (fg)^n : n \geq 0\}$
2. $\{a^n b^n c^{3n} : n \geq 0\}$
3. $\{d^n : n \geq 0\}$
4. $\{d^{3n} f^{2n} : n \geq 0\}$

Exercice 3. Soit A un alphabet, $a \in A$ une lettre distinguée de A, et $h : A^* \to A^*$ l'application qui à un mot $w \in A^*$ associe le mot $f(w)$ obtenu de w en effaçant toutes les lettres a qui y apparaissent. L'application f est-elle un homomorphisme?

Exercice 4. Soit A, B deux alphabets et $h : A \to B^*$ une application qui à toute lettre $a \in A$ associe un mot de B^*. Montrez que h détermine un unique homomorphisme $\bar{h} : A^* \to B^*$ qui coincide avec h sur l'alphabet A.

Exercice 5. On définit deux suites de mots $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et on définit $u_{n+1} = u_n v_n$, $v_{n+1} = v_n u_n$, pour $n \geq 0$.

a) Calculez les mots u_n et v_n pour $n = 1, 2, 3$.

Dernière mise-à-jour – 10 octobre 1996

b) Trouvez un homomorphisme $\varphi : A^* \to A^*$ tel que $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, $v_{n+1} = \varphi(v_n)$. Démontrez votre affirmation (procédez par induction).

c) Déduisez du b) que u_{n+1} est obtenu en itérant l'homomorphisme φ; plus précisément, montrez $u_{n+1} = \varphi^n(u_0)$.

Exercice 6. Soit A un alphabet, $a \in A$ une lettre distinguée de A, et $h : A^* \to A^*$ un homorphisme tel que a soit un facteur gauche de $h(a)$. Montrez que $h^n(a)$ est un facteur gauche de $h^{n+1}(a)$, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 0$, $h^{n+1}(a) = h^n(a)w_n$ pour un certain mot $w_n \in A^*$.

Exercice 7. Soit A un alphabet et $L, M \subseteq A^*$ des langages. On rappelle qu'on désigne par LM le langage:

$$LM = \{uv | u \in L, v \in M\}.$$

a) Soit $L = \{a^n | n \geq 0\}$ et $M = \{b^n | n \geq 0\}$. Calculez $(L \cup L\{b\})M$ et $(L \cap L\{b\})M$.

Soit L, M et N des langages quelconques.

b) Montrez qu'on a $L(M \cup N) = LM \cup LN$.

c) Montrez qu'on a $L(M \cap N) \subseteq LM \cap LN$.

d) A t-on $L(M \cap N) \supseteq LM \cap LN$? Preuve ou contre-exemple.